MATURITNÍ OTÁZKY

matematika

souhrn učiva
testy a cvičení
rady k maturitě

Eva Řídká
Dana Blahunková
Petr Chára

FRAGMENT

Maturitní otázky – Matematika

také v tištěné verzi

Objednat můžete na
www.fragment.cz.

čtení ■ radost ■ poučení

Doporučujeme další e-knihy v edici:
Maturitní otázky – Český jazyk – e-kniha
Maturitní otázky – Literatura– e-kniha
Maturitní otázky – Angličtina – e-kniha
Maturitní otázky – Dějepis – e-kniha

Eva Řídká, Dana Blahunková, Petr Chára
Maturitní otázky – Matematika – e-kniha

OBSAH

ÚVOD

Vážení čtenáři,

kniha, kterou otevíráte, je určena středoškolákům, začínajícím vysokoškolákům, učitelům hledajícím inspiraci i zvídavým zájemcům, ale zejména maturantům. Obsahuje ucelený souhrn středoškolské matematiky rozčleněný do 25 maturitních témat. Každá kapitola začíná motivační úlohou, na níž si můžete ověřit své současné vědomosti. Postupně se seznámíte s teoretickými základy a prostřednictvím řešených úloh, jednodušších i složitějších, si proklestíte cestu k samostatnému řešení problémů. Společně s upevňováním a prohlubováním vašich znalostí se posílí také dovednost rozumět matematickým textům. Čas strávený učením vám zpříjemní rozmanitost úloh, běžných i nezvyklých, modelových i z praxe.

Jednotlivé kapitoly poskytují možnost doplnit si učivo, které je v některých školách chápáno jako rozšířené učivo. Čtenář je pomalu seznamován s tématem, každý další krok je podrobně popsán a následně použit v řešení. Průvodcem vám může být i množství názorných obrázků či utřídění některých důležitých pravidel v tabulkách.

Každý si může najít svůj způsob přípravy. Zdatní studenti by úlohy měli řešit zcela samostatně, jednotlivé kapitoly obsahují i problémy pro náročné. Naopak méně pokročilým jsou k dispozici podrobná řešení všech úloh, včetně rozličných upozornění. Každý nový pojem matematické teorie je doložen ukázkou a následně procvičován. Není nutné vyřešit úlohy na první pokus a ani není potřeba pochopit všechno beze zbytku. Své sebevědomí si mnohem lépe upevníte, zaměříte-li se nejprve na problémy, které jsou pro vás jednodušší, nebo na témata, která vás zajímají. Úspěchu docílíte zejména tím, že samostatně vyřešíte úlohy, jež jste zpočátku dokázali pochopit jen díky nápovědě.

Rozmanitost úloh od typicky školských až po praktické ukázky, rozdílnost forem jejich zadání, různá obtížnost a obsahová šíře od jednoduchých ke komplexním odpovídají požadavkům dnešní i připravované státní maturitiy. V úlohách jsou zastoupena všechna témata obsažená v Katalogu požadavků k maturitní zkoušce uvedeného na stránkách Centra pro zjišťování výsledků vzdělávání MŠMT.

Všem čtenářům přejeme příjemnou a především užitečnou procházku Maturitními otázkami.

Autoři

1 Výroky a výroková logika

Řešíš s kamarádem problém přípravy na maturitu z matematiky. Konstatuješ: „Koupím-li si tuto sbírku a budu-li pilně studovat, pak maturitu z matematiky zvládnu.“ Kamarád odpoví: „No, já si myslím, že když si ji koupíš a nezvládneš maturitu, pak jsi pilně nestudoval.“ Na to kontruješ: „Ty přece říkáš to samé, co jsem řekl já.“

Říkáte skutečně totéž?

Řešení:
Zapiš symbolicky jednoduché výroky:
K: Koupím sbírku. S: Pilně studuji. Z: Zvládnu maturitu.

S použitím logických spojek zapiš oba složené výroky:
$(K \wedge S) \Rightarrow Z$: Koupím-li si tuto sbírku a budu-li pilně studovat, maturitu z matematiky zvládnu.
$(K \wedge \neg Z) \Rightarrow \neg S$: Když si ji koupíš a nezvládneš maturitu, pak jsi pilně nestudoval.

Zapiš tabulku pravdivostních hodnot:

K	S	Z	$\neg S$	$\neg Z$	$K \wedge S$	$K \wedge \neg Z$	$(K \wedge S) \Rightarrow Z$	$(K \wedge \neg Z) \Rightarrow \neg S$
1	1	1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0	1	1
0	0	0	1	1	0	0	1	1

Z posledních dvou sloupců vyplývá, že oba říkáte skutečně totéž. (Složené výroky jsou ekvivalentní.)

1.1 Výrok a negace

Výrok je každá oznamovací věta, která nabývá právě jedné ze dvou pravdivostních hodnot: pravdy, je-li věta pravdivá (označení symbolem 1), anebo nepravdy, je-li věta nepravdivá (označení symbolem 0). Výrokové proměnné se značí velkými písmeny (A–Z).

Negací výroku A je výrok $\neg A$ s opačnou pravdivostní hodnotou, který se vytvoří z původního výroku A spojením „není pravda, že A“, případně jinou větou téhož významu.

Úloha 1

Zapište libovolný pravdivý a nepravdivý výrok a vytvořte negaci:

Řešení:

A	$\neg A$	Výrok	Negace výroku
1	0	Číslo 2 je nejmenší prvočíslo.	Nejmenším prvočíslem není číslo 2.
0	1	Praha je hlavní město Číny.	Praha není hlavním městem Číny.

Úloha 2

Vytvořte různá vyjádření negace následujícího výroku a určete jeho pravdivostní hodnotu:
Číslo 9 je sudé.

Řešení:
Není pravda, že číslo 9 je sudé. Neplatí tvrzení, že číslo 9 je sudé. Číslo 9 není sudé. Číslo 9 je liché. Číslo 9 není násobkem čísla 2. Pro negaci je možné najít ještě další vyjádření. V této úloze má negace výroku pravdivostní hodnotu 1, původní výrok má pravdivostní hodnotu 0.

Úloha 3

Které z následujících vět jsou výroky? U výroků určete pravdivostní hodnotu.

a) Pro $x \in \mathbf{R}$ platí, že $2x - 5 = 1$.

b) Existuje $x \in \mathbf{N}$, pro něž je $2x - 5 = 1$.

c) Pro $x = 3$ platí $2x - 5 = 1$.

d) Existuje záporný kořen rovnice $2x - 5 = 1$.

e) Ke každému parametru a z oboru přirozených čísel existuje právě jedno přirozené číslo x, které je řešením rovnice $x^4 - a(x^3 + x^2 + x + 1) - 1 = 0$.

Řešení:

a) K uvedenému sdělení se nepodaří přiřadit jednu pravdivostní hodnotu. Pro $x = 3$ je tvrzení pravdivé, pro jiné hodnoty proměnné x je nepravdivé. Věta není výrokem.

b), c), d) Všechna tři uvedená tvrzení jsou výroky. Pravdivostní hodnoty jsou postupně 1, 1, 0.

e) Může se stát, že nevyřešíš uvedenou rovnici, a nedokážeš určit pravdivostní hodnotu tvrzení. Přesto můžeš dokázat, že tvrzení nabývá jediné pravdivostní hodnoty, a je tedy výrokem. Zkus posoudit pravdivostní hodnoty všech možností. Pokud by k některé hodnotě parametru a neexistovalo žádné řešení rovnice nebo by k některé hodnotě parametru a existovala alespoň dvě různá řešení, tvrzení by bylo nepravdivé. V opačném případě by se ke každé hodnotě parametru a našlo jediné řešení, pak by tvrzení bylo pravdivé. Obě tyto situace se vzájemně vylučují (první možnost je negací druhé) a jiná situace již nastat nemůže. Jedná se tedy skutečně o výrok. Pokud chceš zjistit odpověď na pravdivostní hodnotu výroku, můžeš nejprve zkusit za a dosadit hodnotu 1, resp. 2, a ukázat, že k vybrané hodnotě existuje jediný kořen z oboru $\mathbf{N}$ ($x = 2$, resp. 3).

Důkaz pravdivosti tvrzení e) provedeš obecně. Rozložíš výraz $x^4 - 1$, vytkneš čtyřčlen $x^3 + x^2 + x + 1$ a získáš jeden kořenový činitel $x - (a + 1)$, tedy i první kořen $x = (a + 1)$. Nulová hodnota druhého činitele $x^3 + x^2 + x + 1$ již nevede k žádnému dalšímu kladnému řešení. Pravdivostní hodnota výroku je 1.

1.2 Složené výroky, logické spojky

Spojením jednoduchých výroků logickými spojkami vzniknou složené výroky.

Konjunkce: $A \wedge B$, což čteme „A **a** B“ či „A **a současně** B“ či „A i B“.
Konjunkce je pravdivá jen v případě, kdy jsou oba výroky pravdivé.

Disjunkce: $A \vee B$, což čteme „A **nebo** B“. Pozor! Spojka „nebo“ nemá význam vylučovací.
Disjunkce je nepravdivá jen v případě, kdy jsou oba výroky nepravdivé.

Implikace: $A \Rightarrow B$, což čteme z „A **vyplývá** B“ či **„jestliže** A**, pak** B“.
Implikace je nepravdivá jen v případě, že předpoklad A je pravdivý, ale tvrzení B je nepravdivé.

Ekvivalence: $A \Leftrightarrow B$, což čteme „A, **právě když** B“ či „A **tehdy a jen tehdy, když** B“.
Ekvivalence je pravdivá, mají-li oba výroky stejnou pravdivostní hodnotu.

Pravdivostní hodnoty složených výroků jsou tedy závislé na pravdivostních hodnotách jednoduchých výroků, což je uvedeno v tabulce:

Jednoduché výroky		Konjunkce $A \wedge B$	Disjunkce $A \vee B$	Implikace $A \Rightarrow B$	Ekivivalence $A \Leftrightarrow B$
A	B				
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

1.3 Negace složených výroků

Složený výrok		Negace
Konjunce	$A \wedge B$	$\neg A \vee \neg B$
Disjunce	$A \vee B$	$\neg A \wedge \neg B$
Implikace	$A \Rightarrow B$	$A \wedge \neg B$
Ekvivalence	$A \Leftrightarrow B$ nebo $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$	$A \Leftrightarrow \neg B$ nebo $\neg A \Leftrightarrow B$ nebo $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

Úloha 4

Je dáno 5 jednoduchých výroků:

A: Přijde Adam.
B: Přijde Bohuslav.
C: Přijde Cyril.
D: Přijde Dana.
E: Přijde Eva.

Pomocí symbolů A–E vytvořte zápisy následujících složených výroků:

Výrok	***Řešení***	*Jiný způsob vyjádření*
a) Nepřijde Adam nebo Bohuslav.	$\neg A \vee \neg B$	$\neg(A \wedge B)$
b) Přijde právě jedna dívka.	$D \Leftrightarrow \neg E$	$(D \Rightarrow \neg E) \wedge (\neg D \Rightarrow E)$
c) Přijde alespoň jeden chlapec.	$A \vee B \vee C$	
d) Přijde-li Dana, nepřijde ani Adam ani Cyril.	$D \Rightarrow (\neg A \wedge \neg C)$	$D \Rightarrow \neg(A \vee C)$

Úloha 5

Vyslovte negace výroků a) až d) z příkladu 4. Nejprve uveďte symbolický zápis negace.

Řešení:

a) $(A \wedge B)$	Přijde Adam i Bohuslav.
b) $D \Leftrightarrow E$	Nepřijde žádná z dívek, anebo přijdou obě. Dana přijde právě tehdy, když přijde Eva.
c) $\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$	Nepřijde nikdo z chlapců. Nepřijde Adam ani Bohuslav a ani Cyril.
d) $D \wedge (A \vee C)$ $(D \wedge A) \vee (D \wedge C)$	Přijde Dana a alespoň jeden z obou chlapců, Adam nebo Cyril. Dana přijde buď s Adamem, nebo s Cyrilem.

Pro některé výroky jsou v tabulce uvedeny různé možnosti.

1.4 Kvantifikované výroky, kvantifikátory

Výroky, které udávají počet, se nazývají kvantifikované výroky.

Obecný kvantifikátor: $\forall$, který se čte **„každý“** či **„pro všechna“** či **„libovolný“**, v záporné větě se čte **„žádný“** či **„nikdo“**. Obecný kvantifikátor přiřazuje popisovanou vlastnost všem objektům.

Existenční kvantifikátor: $\exists$, který se čte **„existuje“** či **„alespoň pro jeden“**. Existenční kvantifikátor vyjadřuje existenci alespoň jednoho objektu s popisovanou vlastností.

Úloha 6

Přečtěte a vysvětlete následující výroky:

a) $\forall x \in \mathbf{R};\ |x| \geq 0$

b) $\exists m \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N};\ m \leq n$

c) $\forall n \in \mathbf{Z}\ \exists m \in \mathbf{Z};\ m < n$

Řešení:

a) Absolutní hodnotou libovolného reálného čísla je číslo nezáporné. (Vlastnost se týká všech reálných čísel.)

b) Existuje přirozené číslo m, které je ze všech přirozených čísel nejmenší. (Stále stejné přirozené číslo m se porovnává se všemi přirozenými čísly n.)

c) Mezi celými čísly je možné k libovolnému z nich najít ještě menší. (Ke každému celému číslu n je možné najít jiné celé číslo m.)

Zatímco výrok b) říká, že v množině přirozených čísel existuje minimum, ve výroku c) se tvrdí, že v množině celých čísel minimum neexistuje.

Při **negaci kvantifikovaných výroků** se obecný kvantifikátor mění na existenční a opačně.

Negace některých kvantifikátorů:

$\forall$	$\exists$
$\exists$	$\forall$
alespoň n prvků je ... (pro $n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$)	méně než n prvků je ..., nejvýše $n-1$ prvků je ...
nejvýše n prvků je ... (pro $n \in \mathbf{N}$)	více než n prvků je ..., nejméně $n+1$ prvků je ..., alespoň $n+1$ prvků je ...
někteří jsou..., alespoň jeden je ...	žádní nejsou ..., nikdo není ...
všichni jsou ...	někteří nejsou ..., alespoň jeden není ...
právě n prvků je ... (pro $n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$)	méně než n prvků nebo více než n prvků je ...
právě jeden prvek je ...	žádný prvek není nebo alespoň dva prvky jsou ...

Úloha 7

Vytvořte negace výroků z příkladu 6.

Řešení:

a) $\exists x \in \mathbf{R};\ |x| < 0$

b) $\forall m \in \mathbf{N}\ \exists n \in \mathbf{N};\ m > n$

c) $\exists n \in \mathbf{Z}\ \forall m \in \mathbf{Z};\ m \geq n$

Úloha 8

Negujte následující výroky: ***Řešení:***

a) Půjdu nejvýše na 2 filmy.	Půjdu alespoň na 3 filmy. (více než na 2)
b) Zpozdil se nejméně o 5 minut.	Pokud se zpozdil, pak méně než o 5 minut.
c) Žádný poslanec nehlasoval proti.	Alespoň jeden poslanec hlasoval proti.
d) V konvexním pětiúhelníku mají libovolné dvě úhlopříčky společný bod.	V konvexním pětiúhelníku je alespoň jedna dvojice úhlopříček, které nemají společný bod.
e) Nikdy nikomu neprozradí všechno.	Někdy někomu všechno prozradí.
f) Každý problém ho zaskočí.	Některý problém ho nezaskočí.
g) Někteří by sami nevyřešili vůbec nic.	Každý by sám něco vyřešil.

1.5 Implikace, obměna, obrácená implikace

Úloha 9

Porovnej v tabulce pravdivostní hodnoty složených výroků $A \Rightarrow B$, $\neg B \Rightarrow \neg A$ a $\neg A \vee B$, dále je porovnej s výroky $B \Rightarrow A$ a $A \Leftrightarrow B$.

Řešení:

Jednoduché výroky				Implikace $A \Rightarrow B$	Obměna implikace $\neg B \Rightarrow \neg A$	$\neg A \vee B$	Obrácená implikace $B \Rightarrow A$	Ekvivalence $A \Leftrightarrow B$
A	B	$\neg A$	$\neg B$					
1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1

Implikace $A \Rightarrow B$ má **stejnou pravdivostní hodnotu** jako **obměna implikace** $\neg B \Rightarrow \neg A$. Je-li složený výrok uvozen kvantifikátory, při obměně implikace se kvantifikátory nezmění (na rozdíl od negace).

Obrácená implikace k výroku $A \Rightarrow B$ je výrok $B \Rightarrow A$. Pravdivostní hodnotu obrácené implikace nelze z původní implikace předvídat. Pokud je implikace i obrácená implikace pravdivá, jsou oba jednoduché výroky dokonce ekvivalentní.

Složený výrok, který je vždy pravdivý, a to nezávisle na pravdivostních hodnotách jednoduchých výroků z nichž je složen, se nazývá **tautologie**.

Příklady tautologií:
$(A \Rightarrow \neg B) \Leftrightarrow (B \Rightarrow \neg A)$
$(A \wedge B) \Rightarrow (A \vee B)$
$A \vee \neg A$

Úloha 10

Vytvořte obměny implikací, obrácené implikace a negace. U úlohy b) a c) označte pravdivostní hodnotu symboly 1, 0:

a) Jestli nespí, pak sní.
b) Má-li rovnoběžník kolmé úhlopříčky, má i shodné strany.
c) Shodují-li se libovolné trojúhelníky alespoň v jedné straně a příslušné výšce, mají stejný obsah.

Řešení:
Obměna implikace:

a) Jestli nesní, pak spí.
b) Nemá-li rovnoběžník shodné strany, nemá ani kolmé úhlopříčky. (1)
c) Mají-li libovolné trojúhelníky odlišný obsah, pak se neshodují v žádné dvojici – strana s příslušnou výškou. (1)

Obrácená implikace:

a) Jestli sní, pak nespí.
b) Má-li rovnoběžník shodné strany, má i kolmé úhlopříčky. (1)
c) Mají-li libovolné trojúhelníky stejný obsah, pak se shodují alespoň v jedné straně a příslušné výšce. (0)

Negace:

a) Nespí a nesní.
b) Rovnoběžník má kolmé úhlopříčky a nemá shodné strany. (0)
c) Existují trojúhelníky s různým obsahem, které se shodují alespoň v jedné straně a příslušné výšce. (0)

Pozor! Změna kvantifikátorů u negací!

Poznámka:
Výrok b) je možné vyslovit jako ekvivalenci. Bude pravdivá, neboť implikace i obrácená implikace je pravdivá. Rovnoběžník má kolmé úhlopříčky, právě když má shodné strany.

Úloha 11

Která z následujících ekvivalencí je pravdivá?

a) $\forall x \in \mathbf{R};\ x \geq 0 \Leftrightarrow |x| = x$
b) $\forall n \in \mathbf{Z};\ 4 \,|\, n \Leftrightarrow 4 \,|\, n^2$

Řešení:
Při důkazových úlohách s ekvivalencí se posuzují pravdivostní hodnoty implikace a obrácené implikace.

a) Oba složené výroky $\forall x \in \mathbf{R};\ x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$, $\forall x \in \mathbf{R};\ |x| = x \Rightarrow x \geq 0$ (implikace a obrácená implikace) jsou pravdivé, proto je pravdivá ekvivalence $\forall x \in \mathbf{R};\ x \geq 0 \Leftrightarrow |x| = x$.
b) Výrok $\forall n \in \mathbf{Z};\ 4 \,|\, n \Rightarrow 4 \,|\, n^2$ je pravdivý, ale obrácená implikace $\forall n \in \mathbf{Z};\ 4 \,|\, n^2 \Rightarrow 4 \,|\, n$ je nepravdivá (např. $4 \,|\, 36$, ale $4 \nmid 6$). Proto je ekvivalence $\forall n \in \mathbf{Z};\ 4 \,|\, n \Leftrightarrow 4 \,|\, n^2$ nepravdivá. K důkazu obrácené implikace užij obměny: $\forall n \in \mathbf{Z};\ 4 \nmid n \Rightarrow 4 \nmid n^2$ (nepřímý důkaz - viz dále).

Úloha 12

Které z následujících výroků jsou vzájemně ekvivalentní?

a) Výrok $A : \forall x \in \mathbf{R};\ x > 1 \Rightarrow x^2 > x$
b) Výrok $B : \forall x \in \mathbf{R};\ x^2 \leq x \Rightarrow x \leq 1$
c) Výrok $C : \forall x \in \mathbf{R};\ x^2 > x \Rightarrow x > 1$
d) Výrok $D : \exists x \in \mathbf{R};\ x > 1 \wedge x^2 \leq x$
e) Výrok $E : \forall x \in \mathbf{R};\ x \leq 1 \vee x^2 > x$
f) Výrok $F : \forall x \in \mathbf{R};\ x^2 \leq x \vee x > 1$

Řešení:
Výrok B je obměnou výroku A, proto jsou oba výroky A, B vzájemně ekvivalentní.
Výroky A a C obsahují obrácené implikace. Výroky nejsou ekvivalentní.
Výrok D je negací výroků A i B, proto má opačnou pravdivostní hodnotu než tyto výroky.
Výrok E je negací výroku D, vznikl tedy dvojnásobným negováním výroku A či B, proto je s oběma těmito výroky vzájemně ekvivalentní.
Výrok F vznikl dvojnásobným negováním výroku C. Proto jsou C a F ekvivalentní výroky.

Všechny tři vzájemně ekvivalentní výroky A, B, E mají tutéž pravdivostní hodnotu, jsou pravdivé. Ekvivalentní výroky C a F jsou nepravdivé a výrok D je rovněž nepravdivý.

Úloha 13

Předpokládejme, že ponožky v prádelním koši rozlišujeme na světlé a tmavé, bavlněné a silonové, dívčí a chlapecké a také tlusté a tenké.

1. Víme, že v prvním koši jsou všechny tlusté ponožky tmavé. Vyplývá z toho, že
   a) tam musí být nějaké tenké světlé ponožky?
   b) pokud je v koši tmavá ponožka, je tlustá?
   c) pokud jsou v koši jen tlusté ponožky, musí být všechny ponožky v koši tmavé?
   d) pokud je v koši nějaká dívčí světlá ponožka, pak je současně tenká?
2. Víme, že ve druhém koši nejsou žádné tlusté chlapecké ponožky ani silonové ponožky, ale všechny ponožky jsou dívčí nebo světlé. Vylučuje se to s tím, že
   e) je tam nějaká světlá chlapecká ponožka?
   f) je tam nějaká dívčí světlá tenká ponožka?
   g) je tam nějaká chlapecká tmavá ponožka?
   h) je tam nějaká tmavá chlapecká bavlněná ponožka?

Řešení:

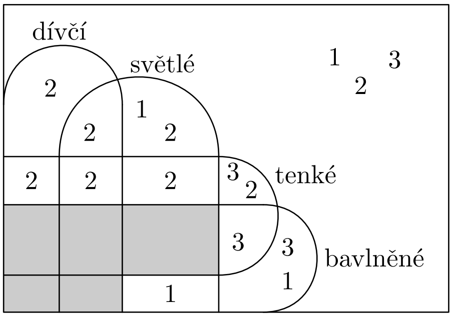
1. a) NE. (Nepředpokládá se existence žádných dalších ponožek v koši.)
   b) NE. (Platí jen obrácená implikace.)
   c) ANO. (Jsou-li tlusté, jsou tmavé.)
   d) ANO. (Platí obměna implikace – není-li ponožka tmavá, není ani tlustá.)

2. Pro řešení další části úlohy můžeš využít následující tabulky:

Ponožky		světlé		tmavé	
		bavlněné	silonové	bavlněné	silonové
tlusté	dívčí		2		2
	chlapecké	1	1, 2	1, 3	1, 2, 3
tenké	dívčí	f)	2		2
	chlapecké	e)	2	3	2, 3

Tabulka znázorňuje situaci ve druhém koši, bílá jsou pole s ponožkami, které v koši určitě nebudou. (Jsou to tlusté chlapecké ponožky (1), silonové ponožky (2) a tmavé chlapecké ponožky (3), neboť nejsou světlé a ani dívčí).

   e) NE. (Zbylo vybarvené pole se světlými chlapeckými ponožkami.)
   f) NE.
   g) ANO. (Zbyla jen bílá pole.)
   h) ANO.



K řešení příkladu 13 je možné použít i **Vennových diagramů** pro znázornění čtyř množin, které představují čtyři charakteristiky (uživatel, odstín, síla, materiál), kde u každé charakteristiky existují dvě možnosti. (Uživatel je dívka či chlapec, odstín je světlý či tmavý apod.) Každá množina představuje jednu možnost u vybrané charakteristiky (např. uživatel je dívka), druhou možnost (uživatel je chlapec) představuje doplněk této množiny. Bílé jsou ty množiny ponožek, které se ve druhém koši nemohou vyskytovat.

1.6 Axiomy, definice, věty, důkazy

Axiom je tvrzení, které se nedokazuje, předpokládá se, že je pravdivé. Axiomy jsou základními kameny každé matematické teorie. (Axiomem je např. tvrzení Eukleidovské geometrie: Libovolným bodem, který leží mimo danou přímku, můžeme vést právě jednu rovnoběžku s touto přímkou.)

Definicí se zavádí nový pojem. (Příklad: Říkáme, že přirozené číslo je prvočíslo, když má v oboru přirozených čísel právě dva různé dělitele – číslo jedna a samo sebe.)

Matematická věta je takový pravdivý výrok (matematická teorie), jehož pravdivost můžeme dokázat prostřednictvím axiomů a vět již dříve dokázaných. (Příklad: V každém kosočtverci jsou úhlopříčky na sebe kolmé.)

Důkazem se vyvozuje pravdivostní hodnota (dokazovaného) tvrzení.

Vyjmenujme čtyři základní typy důkazů: **přímý a nepřímý důkaz, důkaz sporem a důkaz matematickou indukcí**.

V přímém důkazu se z uvedených předpokladů dospěje k dokazovanému tvrzení prostřednictvím pravdivých (dříve dokázaných nebo z axiomů platných) implikací.

Důkaz sporem začíná předpokladem negace dokazovaného výroku. Při vyvozování z této negace se dospěje k nějakému tvrzení, které je nepravdivé, případně je v logickém sporu s předpokladem. Je tak dokázána nepravdivost negace dokazovaného výroku. Pravdivý je původní výrok.

Nepřímý důkaz se používá pro některé výroky formulované jako implikace a je zahájen obměnou dokazované implikace. Další tvrzení se vyvozují podobně jako u přímého důkazu.

Při vytváření (matematické) teorie zpravidla vycházíme z hypotéz. **Hypotéza** je tvrzení, u něhož je evidentní, že může nabývat právě jedné pravdivostní hodnoty, pravdivostní hodnota však není v daném okamžiku známa. Hypotéza je tedy výrokem, u něhož se pravdivostní hodnota teprve hledá.

Úloha 14

Dokažte, že v oboru $\mathbf{N}$ platí:

a) Libovolné složené číslo lze rozložit alespoň na dva činitele různé od 1 a od sebe samého.
b) Nejmenší dělitel m libovolného složeného čísla s, který je různý od 1, musí být prvočíslem.

Řešení:
Nejprve je třeba nahlédnout zadání. Zvolme několik ukázek:
$4 = 2 \cdot 2,\ 99 = 3 \cdot 3 \cdot 11 = 3 \cdot 33 = 9 \cdot 11 = 3^2 \cdot 11,\ 35 = 5 \cdot 7$ a podobně. Všechna tři čísla lze rozložit alespoň na dva dělitele různé od 1, oba jsou menší než složené číslo, které rozkládáme. Nejmenší takový dělitel je prvočíslo (2, 3 a 5).

a) Důkaz (přímý):

Složené číslo s není prvočíslo, proto existuje alespoň jeden jeho dělitel různý od 1 a od s. Vyberme si nejmenšího takového dělitele m, který splňuje tyto podmínky. Po vydělení složeného čísla s jeho dělitelem m dostaneme podíl d $(s : m = d)$, který musí být menší než dělenec s, neboť dělitel m je větší než 1. Platí: $(s = m \cdot d \wedge 1 < m) \Rightarrow 1 \cdot d < m \cdot d \Rightarrow d < s$. Pro obě nalezená čísla m, d platí: $1 < m \leq d < s$. Skutečně tedy existují dva činitelé m a d splňující dané podmínky.

b) Důkaz (sporem):

Předpokládejme negaci tvrzení b), tedy že nejmenší dělitel m různý od 1 není prvočíslem. (Např. u čísla 99 bychom předpokládali, že jeho nejmenší dělitel je 9.) V předchozí úloze jsme již dokázali, že takové číslo m můžeme rozložit na součin dvou menších čísel různých od jedné $(m = m_1 \cdot d_1)$. Potom libovolné z těchto dvou čísel je rovněž dělitelem původního složeného čísla $(s = m \cdot d = m_1 \cdot d_1 \cdot d)$, a zároveň menším číslem, než byl předchozí dělitel m. Dělitel m tedy není nejmenší, což je spor. Proto nemůže být pravdivá negace tvrzení b), ale pravdivé je původní tvrzení.

Úloha 15

Je dána podmnožina přirozených čísel $A = \{n \in \mathbf{N};\ 16 \leq n \leq 26\}$.

a) Porovnej hodnotu každého složeného čísla s z množiny A s druhou mocninou m^2 jeho nejmenšího prvočinitele m, výsledky zobecni pro celou množinu A.
b) Pokud se domníváš, že stejné tvrzení by mělo platit v celém oboru přirozených čísel $\mathbf{N}$, vyslov jej jako hypotézu.
c) Dokaž platnost hypotézy z bodu b).

Řešení:

a)

Složené číslo s z množiny A	Rozklad čísla s na prvočinitele	Druhá mocnina nejmenšího prvočinitele m	Složené číslo s z množiny A	Rozklad čísla s na prvočinitele	Druhá mocnina nejmenšího prvočinitele m
16	2^4	4	22	$2 \cdot 11$	4
18	$2 \cdot 3^2$	4	24	$2^3 \cdot 3$	4
20	$2^2 \cdot 5$	4	25	5^2	25
21	$3 \cdot 7$	9	26	$2 \cdot 13$	4

V množině A platí $m^2 \leq s$.

b) **Hypotéza:** V oboru $\mathbf{N}$ platí, že v rozkladu libovolného složeného čísla s na prvočinitele je druhá mocnina nejmenšího prvočinitele nejvýše rovna danému číslu s.

c) **Důkaz:** Ke každému složenému číslu s a jeho nejmenšímu prvočiniteli m se najde podíl $d = \dfrac{s}{m}$, tedy $s = m \cdot d$, kde $1 < m \leq d < s$ (tvrzení z příkladu 14). Platí $m \leq d$, proto je $m^2 = m \cdot m \leq m \cdot d = s$, tedy platí $m^2 \leq s$.

Hypotéza je pravdivá.

Předchozí hypotézu je možné zformulovat do následující věty:

Uvažujme libovolné přirozené číslo n a množinu P všech prvočísel p, jejichž kvadrát p^2 je nejvýše roven číslu n, tedy $p^2 \leq n$. Je-li dané číslo n složené, pak je dělitelné alespoň jedním prvočíslem p z uvedené množiny P. (Např. číslo 221 je složené, je dělitelné číslem 13 a platí $13^2 = 169 < 221$. Podobně i 289 je číslo složené, je dělitelné číslem 17 a platí $17^2 = 289$.)

Úloha 16

Vyslov obměnu výše uvedené věty.

Řešení:

Obměnu lze vytvořit k implikaci, která je ve druhé části uvedené věty. První část zůstává beze změny:

Uvažujme libovolné přirozené číslo n a množinu P všech prvočísel p, jejichž kvadrát p^2 je nejvýše roven číslu n, tedy $p^2 \leq n$. Jestliže přirozené číslo n není dělitelné žádným z prvočísel p uvedené množiny P, pak n není číslem složeným. (Číslo n je prvočíslo nebo číslo 1.).

Úloha 17

a) Dokažte, že číslo 211 je prvočíslem.
b) Zjistěte, je-li číslo 1001 prvočíslem.

Řešení:

a) Využij předchozí věty. Nejprve urči největší prvočíslo p takové, že $p^2 \leq 211$. Hledané číslo je 13. (Prvočíslo 13 je nejbližší menší prvočíslo k číslu $\sqrt{211}$, neboť $\sqrt{211} \doteq 14{,}5$.) Nyní mezi prvočísly od 2 do 13 hledej dělitele čísla 211. Podle základních znaků dělitelnosti snadno vyloučíš čísla 2, 3 a 5, zbývá tedy číslo 211 vydělit postupně čísly 7, 11 a 13. Při dělení vždy dostaneš nenulový zbytek. Žádné ze zkoumaných prvočísel není dělitelem čísla 211, proto je toto číslo prvočíslem.
b) $\sqrt{1001} \doteq 31{,}6$, zkus dělit číslo 1001 postupně prvočísly od 2 do 31. Číslo 1001 je dělitelné číslem 7, není tedy prvočíslem.

Pro obě tvrzení byl použit přímý důkaz využívající výše uvedenou větu, případně její obměny.

1.7 Důkaz matematickou indukcí

Úloha 18

V Kocourkově na louce se konala slavnost. Měla začít až v okamžiku, kdy přijde všech 99 obyvatel. Nikdo však neuměl počítat. Nechalo se vyrobit 99 triček a kapesníky s čísly od 1 do 99. Na slavnost si každý oblékl tričko, k němuž měl přišpendlený kapesník s číslem o 1 vyšším než na tričku. Tričko s číslem 1 získal nejpotrhlejší občan. Aby ho každý poznal, lišilo se od ostatních nápadně zářivou barvou. Vrchní rada, který slavnost zahajoval, si oblékl tričko s nejvyšším číslem. Kapesník pana rady měl výjimečně číslo 1. Občané se celou hodinu trousili na louku. Každý z nich měl na paměti radu, kterou se bezpodmínečně řídil. Jako poslední přišel pan rada. Zadíval se na louku. Když se do trávy usadil i poslední občan, pan rada poznal, že jsou na louce všichni. Jakou radou se Kocourkovští řídili a co musel rada zkontrolovat, aby si byl jist přítomností všech obyvatel?

Řešení:
I když se sešel konečný počet lidí, byl využitý princip matematické indukce. Rada zněla: „Až najdeš osobu, která má na tričku stejně vypadající číslo, jaké je na tvém kapesníku, posaď se. Jinak musíš zůstat stát.“ Při příchodu pan rada zkontroloval, že všichni sedí a že je přítomná i osoba v zářivém tričku s číslem 1.

Přítomností první osoby byl splněn indukční předpoklad. Indukční krok byl zajištěn přítomností osoby s následujícím číslem. Díky tomu, že nikdo nestál, bylo jasné, že <u>každý</u> našel následníka, a přítomnost tak byla ověřena u všech osob.

$$\overset{1}{\bullet} \longrightarrow \overset{2}{\bullet} \longrightarrow \overset{3}{\bullet} \longrightarrow \cdot \quad \cdot \quad \cdot \longrightarrow \overset{k}{\bullet} \longrightarrow \overset{k+1}{\bullet} \longrightarrow \cdot \quad \cdot \quad \cdot \longrightarrow \overset{n}{\bullet}$$

Nepřítomnost první osoby by odhalil rada (nesplněný indukční předpoklad). Libovolná stojící osoba (světlý bod s pořadím k) by upozornila na nepřítomnost následující osoby (prázdný bod s pořadím $k+1$) a na přerušení kontroly. (Nesplněný indukční krok značí přeškrtnutá šipka.)

$$\overset{1}{\bullet} \longrightarrow \overset{2}{\bullet} \longrightarrow \overset{3}{\bullet} \longrightarrow \cdot \quad \cdot \quad \cdot \longrightarrow \overset{k}{\bullet} \longrightarrow \overset{k+1}{\circ} \not\longrightarrow \cdot \quad \cdot \quad \cdot \longrightarrow \overset{n}{\bullet}$$

Důkaz matematickou indukcí je vhodný pro některá tvrzení T, která jsou závislá na proměnné n z množiny přirozených čísel. (Na rozdíl od výše uvedené úlohy množina hodnot proměnné n není shora omezena.) Symbolický zápis dokazovaného tvrzení je $\forall n \in \mathbf{N};\ T(n)$, případně $\forall n \geq p;\ T(n)$, kde n, p jsou přirozená čísla.

Ve shodě s výše uvedenou úlohou se při důkazu matematickou indukcí využívá dvou kroků – indukčního předpokladu a indukčního kroku.

Důkaz matematickou indukcí:

1. **Indukční předpoklad**
   Tvrzení se dokáže pro $n = 1$, tedy platí $T(1)$ (resp. tvrzení se dokáže pro $n = p$, kde p je nejmenší hodnota proměnné n, tedy platí $T(p)$). Někdy se tvrzení dokazuje ještě pro několik následujících přirozených čísel.
2. **Indukční krok**
   Pro libovolné $k \in \mathbf{N}$ (resp. pro libovolné $k \geq p$) je třeba dokázat: Platí-li tvrzení pro přirozené číslo k, pak platí i pro následující přirozené číslo $k+1$, tedy $\forall k \in \mathbf{N};\ T(k) \Rightarrow T(k+1)$.

Úloha 19

Dokažte, že pro všechna přirozená čísla n platí: $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n \cdot (n+1)$.

Řešení:
Levou stranu nerovnosti označ symbolem $L(n)$, tedy $L(n) = 2 + 4 + 6 + \cdots + 2n$. Pravá strana je $P(n) = n \cdot (n+1)$.

Ověř oba kroky matematické indukce.

1. Nejprve dokaž, že $L(1) = P(1)$. Platí, že $L(1) = 2$, $P(1) = 1 \cdot 2 = 2$, tedy $L(1) = P(1)$.
2. Je třeba dokázat, že platí: $\forall k \in \mathbf{N};\ L(k) = P(k) \Rightarrow L(k+1) = P(k+1)$.
   Za předpokladu, že je $L(k) = P(k)$, platí:

$$\begin{aligned} L(k+1) &= \underbrace{2 + 4 + \cdots + 2k}_{L(k)} + 2(k+1) = L(k) + 2(k+1) = P(k) + 2(k+1) = \\ &= k \cdot (k+1) + 2(k+1) = (k+1) \cdot (k+2) \\ P(k+1) &= (k+1) \cdot (k+2) = L(k+1) \end{aligned}$$

   Pro nepravdivý předpoklad kdy $L(k) \neq P(k)$, je implikace pravdivá.

Závěr:
Tvrzení je pravdivé.

Úloha 20

Je dán výraz $V(n) = 6n^2 + 3^n$.

Dokažte, že

a) platí: $\forall n \in \mathbf{N};\ 6 \mid V(n) \Rightarrow\ 6 \mid V(n+1)$,

b) není pravda, že $\forall n \in \mathbf{N};\ 6 \mid V(n)$.

Řešení:

a) $V(n+1) = 6(n+1)^2 + 3^{n+1} = 6n^2 + 12n + 6 + 3 \cdot 3^n = 6n^2 + 12n + 6 + (1+2) \cdot 3^n =$

$$= 6n^2 + 12n + 6 + 3^n + 2 \cdot 3^n = \underbrace{6n^2 + 3^n}_{V(n)} + 12n + 6 + 2 \cdot 3^2 =$$

$$= V(n) + 12n + 6 + 2 \cdot 3 \cdot 3^{n-1} = V(n) + 6 \cdot (2n + 1 + 3^{n-1})$$

Pokud je předpoklad nepravdivý, tedy $6 \nmid V(n)$, pak je implikace pravdivá.

Pokud je předpoklad pravdivý, tedy $6 \mid V(n)$, pak platí, že $6 \mid [\,V(n) + 6 \cdot (2n + 1 + 3^{n-1})\,]$, neboť k výrazu dělitelnému šesti byl přičten jen násobek čísla 6.

b) Hodnota výrazu $V(n) = 6n^2 + 3^n$ pro $n = 1$ je $V(1) = 9$, tedy alespoň jedna hodnota výrazu není dělitelná šesti.

Poznámka:

Indukční předpoklad není splněn, ale indukční krok platí.

Závěr:

Byla dokázána pravdivost implikace i nepravdivost druhého tvrzení.

Úloha 21

V rovině je umístěno n různých bodů. Dokažte, že existuje nejvýše $\binom{n}{2}$ různých přímek, z nichž každá prochází alespoň dvěma z daných bodů, je-li n libovolné přirozené číslo větší než 1.

Řešení:

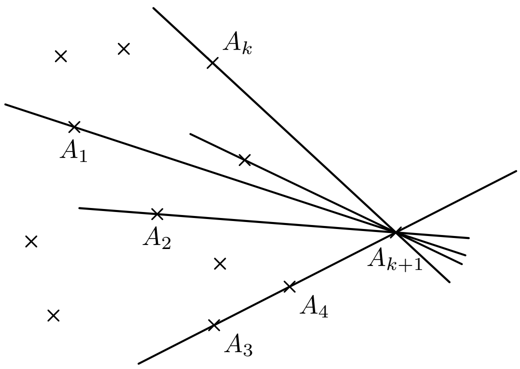
Počet výše definovaných různých přímek pro n různých bodů roviny označ symbolem $p(n)$. Máš dokázat, že $\forall n \in \mathbf{N}\setminus\{1\},\ p(n) \leq \binom{n}{2}$. Dokaž oba kroky matematické indukce.

1. Dvěma různými body je možné vést právě jednu přímku. Pro $n = 2$ platí $p(2) = 1 = \binom{2}{2}$.

2. Nechť prvních k bodů je propojeno $p(k)$ přímkami. Z dalšího bodu A_{k+1} vedeš k bodům A_1–A_k dalších k přímek, z nichž nejvýše k je nových (některé mohou splynout s již existujícími přímkami).

   Platí $p(k+1) \leq k + p(k)$.

   Je-li splněn indukční předpoklad, pro k bodů, tedy $P(k) \leq \binom{k}{2}$, pak platí:



$$p(k+1) \leq k + p(k) \leq k + \binom{k}{2} = k + \frac{k!}{(k-2)!\,2!} = \frac{2k\,(k-2)! + k!}{2(k-2)!} =$$

$$= \frac{(k-2)!\,[2k + k(k-1)]}{2(k-2)!} = \frac{(k-2)!\,(k^2+k)}{2(k-2)!} = \frac{(k+1)k(k-2)!}{2(k-2)!}$$

Dále rozšíříš dvojčlenem $(k-1)$:

$$\frac{(k+1)k(k-1)(k-2)!}{2(k-1)(k-2)!} = \frac{(k+1)!}{2!(k-1)!} = \binom{k+1}{2}$$

Tedy platí $p(k+1) \leq \binom{k+1}{2}$.

Poznámka:
Tuto úlohu je možné dokazovat jednodušším způsobem než matematickou indukcí.

Závěr:
Uvedená nerovnost platí pro všechna přirozená čísla větší než 1.

Procvičuj

1. Ověřte pomocí tabulky pravdivostních hodnot, že pro libovolné výroky A a B platí:
   $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
2. Určete negaci výroku: Alespoň dva příklady jsem vyřešil správně.
   a) Vyřešil jsem správně nejvýše dva příklady.
   b) Určitě jsem správně vyřešil jeden příklad.
   c) Vyřešil jsem správně nejvýše jeden příklad.
   d) Nic jsem nevyřešil správně.
3. Určete negaci výroku: Nejvýše pět lidí ze třídy sežene lístky na koncert.
   a) Pět lidí lístky nesežene.
   b) Alespoň šest lidí lístky sežene.
   c) Maximálně čtyři seženou lístky.
   d) Nikdo lístky nesežene.
4. Určete negaci výroku: Na výlet pojede právě jeden z mých rodičů.
   a) Na výlet pojedou oba.
   b) Na výlet nepojede žádný z mých rodičů.
   c) Na výlet pojede buď jeden nebo druhý.
   d) Na výlet pojedou oba nebo žádný z mých rodičů.
5. Určete negaci výroku: Půjdu do kina nebo do divadla.
   a) Nepůjdu do kina ani do divadla.
   b) Půjdu do kina i do divadla.
   c) Půjdu do kina a nepůjdu do divadla.
   d) Nepůjdu do kina, půjdu do divadla.
6. Negujte výroky:
   a) Půjdu se koupat právě tehdy, když bude jasno.
   b) Když si dám kávu, dám si také zákusek.
7. Negujte výroky:
   a) Jaká matka, taká Katka.
   b) Žádný učený z nebe nespadl.
   c) Nebude-li pršet, nezmokneme.
8. Vyslovte obměnu a negaci implikací:
   a) Pokud se neučil, nic nevypočítá.
   b) Složím-li maturitní zkoušku, oslavím to s rodiči.
9. Určete, zda následující logické souvětí je tautologií: $((A \Rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow B$

Klíč k procvičuj

1. Nejdříve sestavíš tabulku pravdivostních hodnot:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$(\neg A \wedge \neg B)$	$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1	1

   Jelikož v posledním sloupci nacházíme samé jedničky, je tím tvrzení ověřeno.

2. Správně je c) „Alespoň n" neguj jako „nejvýše $n - 1$".

3. Správně je b) „Nejvýše n" neguj jako „alespoň $n + 1$."

4. Správně je d) Negace výroku „právě jeden ze dvou" je „žádný nebo oba".

5. Správně je a) Negace výroku $A \vee B$ je $\neg A \wedge \neg B$.

6. V případě a) neguj ekvivalenci $A \Leftrightarrow B$ jako $A \Leftrightarrow \neg B$, případně jako $\neg A \Leftrightarrow B$. Obě tyto možnosti jsou:
   Půjdu se koupat, právě když nebude jasno. Nepůjdu se koupat, právě když bude jasno.
   V případě b) neguj implikaci $A \Rightarrow B$ jako $A \wedge \neg B$: Dám si kávu a nedám si zákusek.

7. V případě a) neguješ implikaci: Taková (nějaká) matka a jiná Katka.
   V případě b) se neguje také kvantifikátor: Alespoň jeden učený z nebe spadl.
   V případě c) neguješ implikaci: Nebude pršet a zmokneme.

8. a) Obměna: Pokud něco vypočítá, pak se učil.
      Negace: Neučil se a něco vypočítá.
   b) Obměna: Když nebudu slavit s rodiči, nesložil jsem maturitní zkoušku.
      Negace: Složím maturitní zkoušku a neoslavím to s rodiči.

9. Sestav tabulku pravdivostních hodnot:

A	B	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \wedge A$	$((A \Rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow B$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

   Uvedený výrok je tautologií.

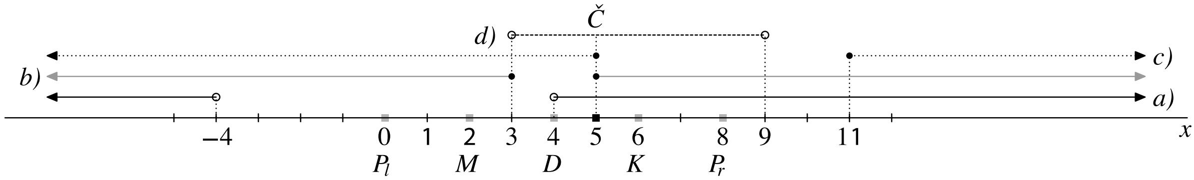
2 Absolutní hodnota, rovnice a nerovnice

Silnice z Plumlova do Prostějova prochází i vesnicemi Mostkovice, Domamyslice a Krasice. Vzdálenosti obcí při jízdě po silnici jsou: Plumlov – Mostkovice 2 km, Mostkovice – Domamyslice 2 km, Domamyslice – Krasice 2 km a Krasice – Prostějov 2 km. Silnice prochází též obcí Čechovice. Najdi polohu Čechovic, jestliže víš:

a) Silniční vzdálenost Čechovic od Plumlova je větší než 4 km.
b) Při cestě z Čechovic do Domamyslic se ujede nejméně 1 km.
c) Silnice z Čechovic do Prostějova má délku nejméně 3 km.
d) Z Čechovic do Krasic se neujedou ani 3 km.

Řešení:
Přehledné je grafické řešení. Na číselné ose x s počátkem v bodě P_l (Plumlov) umísti body představující další obce. (Zvol si např. kladnou poloosu.) Body znázorňující jednotlivé obce jsou označeny počátečními písmeny názvů obcí, Prostějov je P_r. Souřadnice těchto bodů jsou příslušné silniční vzdálenosti od Plumlova: $P_l[0]$, $M[2]$, $D[4]$, $K[6]$, $P_r[8]$, neznámou vzdálenost mají Čechovice $\check{C}[x]$.

Neznámou x lze vyjádřit soustavou nerovnic a zobrazit na číselné ose:



a)	$\lvert x\rvert > 4$	$\Leftrightarrow$	$x \in (-\infty; 4) \cup (4; \infty)$	dvě polopřímky bez hraničních bodů
b)	$\lvert x-4\rvert \geq 1$	$\Leftrightarrow$	$x \in (-\infty; 3\rangle \cup \langle 5; \infty)$	dvě polopřímky s hraničními body
c)	$\lvert x-8\rvert \geq 3$	$\Leftrightarrow$	$x \in (-\infty; 5\rangle \cup \langle 11; \infty)$	dvě polopřímky s hraničními body
d)	$\lvert x-6\rvert < 3$	$\Leftrightarrow$	$x \in (3; 9)$	úsečka bez krajních bodů

Řešením je průnik množin v a) – b). (Hodnotu $x = 5$ obsahují všechny množiny.)

Závěr:
Čechovice leží mezi Plumlovem a Prostějovem ve vzdálenosti 5 km od Plumlova a 3 km od Prostějova.

2.1 Absolutní hodnota, geometrická interpretace

Absolutní hodnota reálného čísla a je nezáporné číslo $|a|$, které se vytvoří podle pravidla: Nezáporné číslo se absolutní hodnotou nezmění ($|a| = a$ pro $a \geq 0$), ze záporného čísla vytvoří absolutní hodnota číslo opačné, tedy kladné ($|a| = -a$ pro $a < 0$).

Úloha 1

Určete absolutní hodnoty následujících čísel a výrazů:

a	2	0	-3	-10^{-3}	$3-\pi$	$\sqrt{8}-\sqrt{7}$	$3-\sqrt{10}$	$\cos\frac{8\pi}{7}$	$\operatorname{tg}\frac{8\pi}{7}$	x, kde $x \leq -10^{-3}$	y, kde $1-2y<0$
Řešení:											
$\lvert a\rvert$	2	0	3	10^{-3}	$\pi-3$	$\sqrt{8}-\sqrt{7}$	$\sqrt{10}-3$	$-\cos\frac{8\pi}{7}$	$\operatorname{tg}\frac{8\pi}{7}$	$-x$, neboť $x < -10^{-3} < 0$	y, neboť $y > \frac{1}{2} > 0$

Úloha 2

Platí následující rovnosti? ***Řešení:***

a)	$\lvert \log 0{,}1 + \log \sqrt{10} \rvert = \dfrac{1}{2}$	$L = \left\lvert -1 + \dfrac{1}{2} \right\rvert = \dfrac{1}{2}$	Ano
b)	$\lvert \log 0{,}1 + \log \sqrt{10} \rvert = \lvert \log 0{,}1 \rvert + \lvert \log \sqrt{10} \rvert$	$P = \lvert -1 \rvert + \lvert 0{,}5 \rvert = 1{,}5$	Ne
c)	$\lvert 3 - \pi \rvert = \lvert \pi - 3 \rvert$	Výrazy uvnitř $\lvert\,\rvert$ jsou opačné.	Ano
d)	$\lvert 3 + \sqrt{10} \rvert = \lvert -3 - \sqrt{10} \rvert$	Výrazy uvnitř $\lvert\,\rvert$ jsou opačné.	Ano
e)	$\dfrac{\lvert g^2 - 1 \rvert}{\lvert g - 1 \rvert} = g + 1$ pro libovolné $g \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$	$L = \dfrac{\lvert g - 1 \rvert \, \lvert g + 1 \rvert}{\lvert g - 1 \rvert} = \lvert g + 1 \rvert$	Ne
f)	$\sqrt{a^2 - 4a + 4} = \lvert 2 - a \rvert$ pro každé $a \in \mathbf{R}$	$P = \sqrt{(a-2)^2} = \lvert a - 2 \rvert$	Ano

Absolutní hodnotu reálného čísla a je možné znázornit na číselné ose jako vzdálenost obrazu čísla a od počátku. (Absolutní hodnota komplexního čísla z se znázorní v Gaussově rovině rovněž jako vzdálenost obrazu čísla z od počátku.) Absolutní hodnota rozdílu dvou čísel $\lvert m - n \rvert$ se interpretuje jako vzdálenost obrazů obou čísel m, n.

Úloha 3

Na číselné ose zobrazte všechny hodnoty čísla $x \in \mathbf{R}$ vyhovující vztahu:

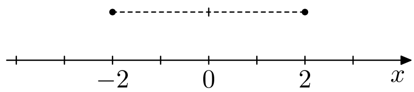
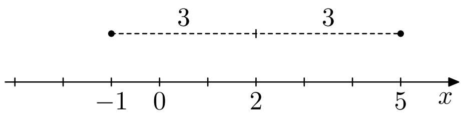
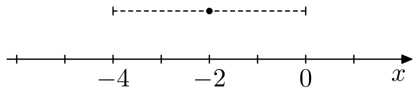
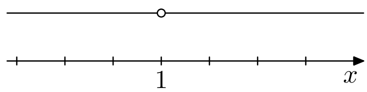
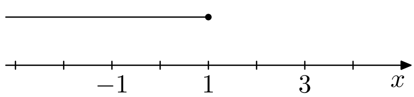
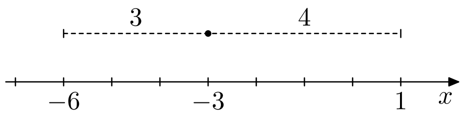
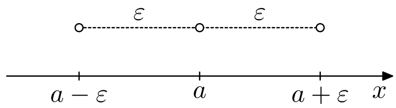
a) $\lvert x \rvert = 2$ b) $\lvert x - 2 \rvert = 3$ c) $\lvert x + 4 \rvert = \lvert x \rvert$

d) $\lvert x - 1 \rvert > 0$ e) $\lvert x - 3 \rvert \geq \lvert x + 1 \rvert$ f) $\lvert x - 1 \rvert = 1 + \lvert x + 6 \rvert$

g) $0 < \lvert x - a \rvert < \varepsilon$, kde $\varepsilon > 0$, $a \in \mathbf{R}$

Řešení:

Každý výraz nejprve správně interpretuj:

a) Vzdálenost obrazu čísla x od počátku je 2 (jednotky). Řešením jsou obě čísla z množiny $\{-2; 2\}$.	
b) Vzdálenost obrazu čísla x od čísla 2 je 3. Řešením jsou obě čísla z množiny $\{-1; 5\}$.	
c) Obraz čísla x je stejně vzdálen od čísla -4 jako od počátku. Řešením je jediné číslo množiny $\{-2\}$.	
d) Vzdálenost obrazu čísla x od 1 je větší než 0. Řešením jsou všechna reálná čísla kromě čísla 1, tj. $\mathbf{R} \setminus \{1\}$.	
e) Obraz čísla x je od 3 alespoň tak vzdálen jako od -1. Řešením je interval $(-\infty; 1\rangle$, kde 1 (souřadnice středu úsečky, jejíž krajní body mají souřadnice -1 a 3) představuje hodnotu x splňující rovnost obou výrazů.	
f) Obraz čísla x je od 1 o jedničku dále než od -6. Řešením je pouze $\{-3\}$.	
g) Obraz čísla x je od obrazu čísla a vzdálen o méně než ε, a $x \neq a$. Řešením je $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \setminus \{a\}$.	

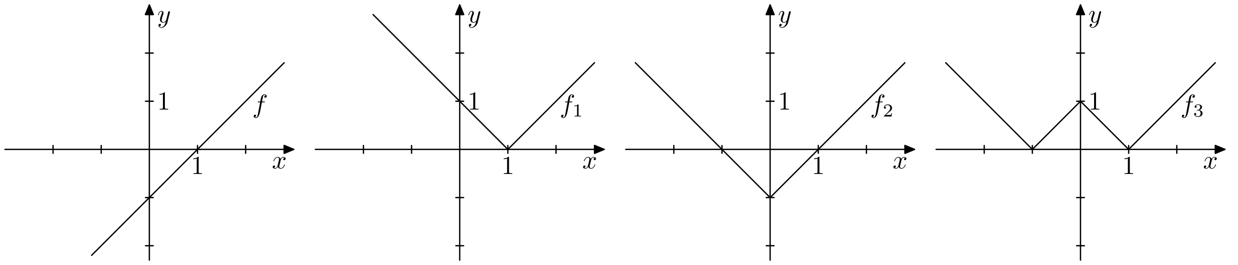
2.2 Graf lineární funkce s absolutní hodnotou

Úloha 4

Porovnej tři funkce f_1, f_2, f_3 s absolutní hodnotou s jednoduchou lineární funkcí f:

$$f : y = x - 1 \qquad a)\ f_1 : y = |x - 1| \qquad b)\ f_2 : y = |x| - 1 \qquad c)\ f_3 : y = ||x| - 1|$$

Řešení:



a) Celý výraz na pravé straně je v absolutní hodnotě. Žádná hodnota y proto není záporná. Po doplnění absolutní hodnoty změní všechny záporné hodnoty výrazu $x - 1$ znaménko, nezáporné hodnoty nikoli. Body grafu funkce f, které leží pod souřadnicovou osou x, se zobrazí souměrně podle této osy („překlopí se“ nahoru), ostatní body zůstávají beze změny.

b) V absolutní hodnotě je neznámá x. Pro nezáporné hodnoty x se doplněním absolutní hodnoty výraz nezmění. Část grafu funkce f_2 vpravo od souřadnicové osy y se proto shoduje s grafem funkce f. Dále se využije vlastnosti $|x| = |-x|$. Platí, že $f_2(-x) = f_2(x)$, funkce je sudá, graf je tedy souměrný podle osy y. Levá část grafu se doplní souměrně podle pravé.

c) Jde o kombinaci obou předchozích vlastností. Funkci f_3 se získá z funkce f_1 jako v předchozím případě změnou x na $|x|$. Funkce f_3 je opět sudá. Graf funkce vpravo od osy x se oproti funkci f_1 nezmění, levá část se vytvoří „obtisknutím“ pravé části.

Úloha 5

Výraz $V(x)$, kde $x \in \mathbf{R}$, vyjádřete bez absolutní hodnoty.

a) $V(x) = |2x - 5|$

b) $V(x) = |-2x - 4|$

Řešení:

Výraz zapsaný uvnitř absolutní hodnoty může nabývat kladných (+), záporných (-), nebo nulových hodnot v závislosti na hodnotě x. Hodnota x, pro níž je výraz nulový, se nazývá nulový bod. Přidáním nebo odstraněním absolutní hodnoty se nezáporný výraz nezmění, záporný výraz změní znaménko.

a) Nulový bod výrazu $2x - 5$ uvnitř absolutní hodnoty je 2,5, neboť $2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 2{,}5$.

I. způsob řešení:

1. Výraz $2x - 5$ uvnitř absolutní hodnoty je kladný pro $x \in (2{,}5; \infty)$, neboť $2x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > 2{,}5$. V tomto intervalu se výrazy s absolutní hodnotou a bez absolutní hodnoty neliší: $V(x) = |2x - 5| = 2x - 5$.
2. Výraz $2x - 5$ uvnitř absolutní hodnoty je záporný pro $x \in (-\infty; 2{,}5)$, neboť $2x - 5 < 0 \Leftrightarrow x < 2{,}5$. V tomto intervalu má výraz s absolutní hodnotou opačné znaménko než výraz bez absolutní hodnoty, tedy $V(x) = |2x - 5| = -(2x - 5) = -2x + 5$.

II. způsob řešení:

Určí se nulový bod, viz výše: $x = 2{,}5$. Uvnitř intervalu ohraničeného nulovým bodem má výraz bez absolutní hodnoty stále stejné znaménko. Znaménko výrazu se určí dosazením libovolného bodu z tohoto intervalu.

1. Např. $3 \in (2{,}5; \infty)$, $2 \cdot 3 - 5 = 1 > 0$, proto je pro $x \in (2{,}5; \infty)$ výraz $2x - 5 > 0$ a platí $V(x) = |2x - 5| = 2x - 5$. (Absolutní hodnota kladný výraz neovlivní.)

2. Podobně $0 \in (-\infty; 2{,}5)$, $2 \cdot 0 - 5 = -5 < 0$, proto je pro $x \in (-\infty; 2{,}5)$ výraz $2x - 5 < 0$ a platí $V(x) = |2x - 5| = -2x + 5$. (Absolutní hodnota záporného výrazu je kladná, tedy opačná.)

Závěr:
Pro $x \in (2{,}5; \infty)$ je $V(x) = 2x - 5$, dále $V(2{,}5) = 0$ a pro $x \in (-\infty; 2{,}5)$ je $V(x) = -2x + 5$.

Poznámka:
Nulový bod je možné připojit k libovolnému z obou intervalů.

b) $V(x) = |-2x - 4|$ (II. způsob)
Nulový bod: $-2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$.
Nulový bod rozdělí množinu reálných čísel na dva intervaly: $\mathbf{R} = (-\infty; -2) \cup \langle -2; \infty)$

1. Např. $-3 \in (-\infty; -2)$, $-2 \cdot (-3) - 4 = 2 > 0$, hodnota výrazu s absolutní hodnotou je stejná: $V(x) = |-2x - 4| = -2x - 4$.
2. Podobně $0 \in \langle -2; \infty)$, $-2 \cdot 0 - 4 = -4 < 0$, hodnota výrazu s absolutní hodnotou je opačná: $V(x) = |-2x - 4| = 2x + 4$.

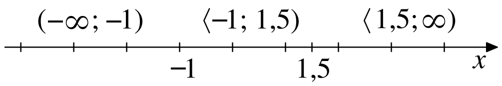
Závěr:
Pro $x \in (-\infty; -2)$ je $V(x) = -2x - 4$, pro $x \in \langle -2; \infty)$ je $V(x) = 2x + 4$.

Úloha 6

Sestrojte graf funkce $f:\ y = |2x - 3| + |x + 1| + x - 6$.

Řešení:
Nejprve je třeba odstranit absolutní hodnoty. Urči nulové body obou výrazů v absolutní hodnotě:
$2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1{,}5$; $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Dva nulové body rozdělí definiční obor funkce na tři intervaly:



1. V jednotlivých intervalech nahraď absolutní hodnotu odpovídajícím výrazem bez absolutní hodnoty (odstranění absolutní hodnoty výrazu):

$x \in$	$\mathrm{I} = (-\infty; -1)$	$\mathrm{II} = \langle -1; 1{,}5)$	$\mathrm{III} = \langle 1{,}5; \infty)$
$\lvert 2x - 3 \rvert$	$3 - 2x$	$3 - 2x$	$2x - 3$
$\lvert x + 1 \rvert$	$-x - 1$	$x + 1$	$x + 1$

Do výrazu v absolutní hodnotě se dosadí libovolné číslo z příslušného intervalu (např. -2 v intervalu I, 0 v II, a 2 v III). Je-li hodnota výrazu kladná, absolutní hodnota se odstraní beze změny, pro záporné hodnoty se výraz násobí číslem -1 a znaménka všech členů se změní, viz příklad 5b).

2. Uprav přepis funkce v jednotlivých intervalech:

I. $x \in (-\infty; -1)$
$y = 3 - 2x - x - 1 + x - 6$
$y = -2x - 4$

II. $x \in \langle -1; 1{,}5)$
$y = 3 - 2x + x + 1 + x - 6$
$y = -2$

III. $x \in \langle 1{,}5; \infty)$
$y = 2x - 3 + x + 1 + x - 6$
$y = 4x - 8$

3. Grafy všech tří funkcí jsou části přímek. Přímka je určena dvěma body. Pro každou funkci definovanou pro daný interval urči souřadnice dvou bodů (použij i krajních bodů intervalů) a zakresli graf funkce:

I.

x	-2	-1
y	0	-2

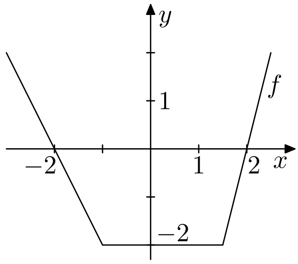
II.

x	-1	$1{,}5$
y	-2	-2

III.

x	$1{,}5$	2
y	-2	0

Definiční obor funkce f je $\mathbf{R}$, obor hodnot je interval $\langle -2; \infty)$.
Graf je možné načrtnout bez předešlých úprav pomocí čtyř bodů. Z původního předpisu funkce se určí hodnoty funkce v nulových bodech výrazů v absolutní hodnotě, v nichž se graf funkce „láme“, a po jedné hodnotě ještě ve vnitřních bodech obou krajních intervalů:



$f(-1) = |2 \cdot (-1) - 3| + |-1 + 1| + (-1) - 6 = -2,$
$f(1{,}5) = |2 \cdot 1{,}5 - 3| + |1{,}5 + 1| + 1{,}5 - 6 = -2$ a podobně $f(-2) = 0$, $f(2) = 0$.

2.3 Rovnice s absolutní hodnotou

Úloha 7

V $\mathbf{R}$ řešte: $|x + 2| = |x| - 3$

Řešení:
Užij podobného postupu jako u předchozí úlohy. Jednotlivé kroky je možné zaznamenat do tabulky. Nulové body jsou $x = -2$ a $x = 0$, a ty rozdělí množinu reálných čísel na tři intervaly.

$x \in$	I = $(-\infty; -2)$	II = $\langle -2; 0)$	III = $\langle 0; \infty)$
$\|x + 2\|$	$-x - 2$	$x + 2$	$x + 2$
$\|x\|$	$-x$	$-x$	x
Rovnice:	$-x - 2 = -x - 3$ $-2 = -3$ nepravdivý výrok	$x + 2 = -x - 3$ $x = -\frac{5}{2}$	$x + 2 = x - 3$ $2 = -3$ nepravdivý výrok
Řešení v intervalu:	$K_I = \emptyset$	$-\frac{5}{2} \notin \langle -2; 0) \Rightarrow K_{II} = \emptyset$	$K_{III} = \emptyset$

Rovnice nemá řešení.

2.4 Nerovnice s absolutní hodnotou

Úloha 8

V $\mathbf{R}$ řešte: $|x + 3| > |x - 2| + x$

Řešení:
Nulové body jsou $x = -3$ a $x = 2$, takže opět dostáváš tři intervaly.

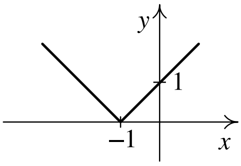
$x \in$	I = $(-\infty; -3)$	II = $\langle -3; 2)$	III =$\langle 2; \infty)$
$\|x + 3\|$	$-x - 3$	$x + 3$	$x + 3$
$\|x - 2\|$	$-x + 2$	$-x + 2$	$x - 2$
Nerovnice:	$-x - 3 > -x + 2 + x$ $-x > 5$ $x < -5$ $x \in (-\infty; -5)$	$x + 3 > -x + 2 + x$ $x > -1$ $x \in (-1; \infty)$	$x + 3 > x - 2 + x$ $-x > -5$ $x < 5$ $x \in (-\infty; 5)$
Řešení v intervalu:	$K_I =$ $= (-\infty; -3) \cap (-\infty; -5) =$ $= (-\infty; -5)$	$K_{II} =$ $= \langle -3; 2) \cap (-1; \infty) =$ $= (-1; 2)$	$K_{III} =$ $= \langle 2; \infty) \cap (-\infty; 5) =$ $= \langle 2; 5)$

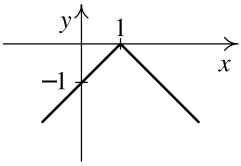
Řešení získáš sjednocením dílčích řešení: $K = K_I \cup K_{II} \cup K_{III}$

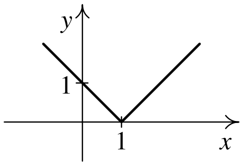
Závěr:
$K = (-\infty; -5) \cup (-1; 5)$.

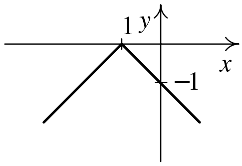
Procvičuj

1. Sestrojte graf funkce $y = |3 - x| + |3 + x|$.
2. Grafem funkce $y = |-x - 1|$ je:

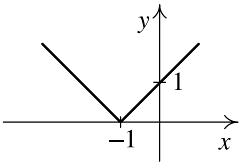
a)


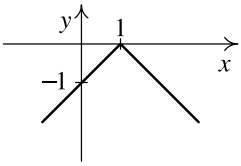
b)


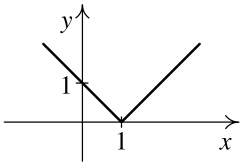
c)


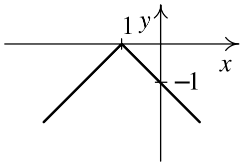
d)


3. Grafem funkce $y = -|1 - x|$ je:

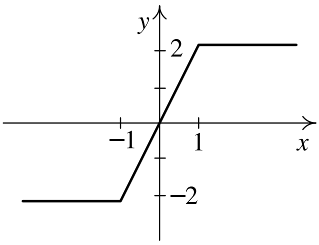
a)


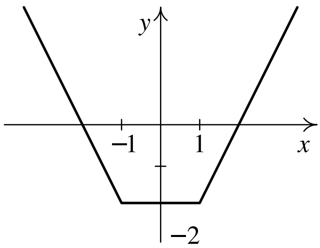
b)


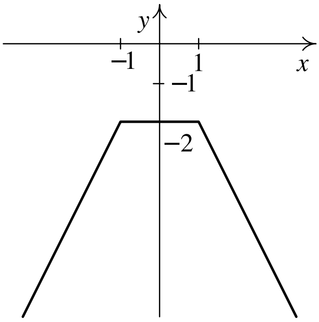
c)


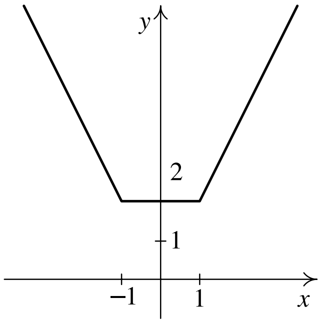
d)


4. Grafem funkce $y = -|x - 1| - |x + 1|$ je:

a)


b)


c)


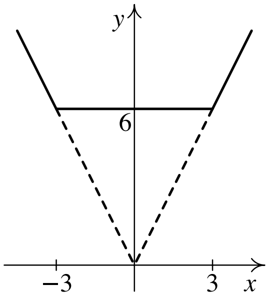
d)


5. Sestrojte graf funkce $y = ||x + 2| - 2|$
6. Řešte rovnici v $\mathbf{R}$: $\dfrac{1}{3}|x - 2| = 3|x - 4|$
7. Řešte rovnici v $\mathbf{R}$: $2|x + 1| + |x - 3| = |5 - x|$
8. Řešte nerovnici v $\mathbf{R}$: $6 - 3|1 - x| \leq |x + 2|$
9. Řešte nerovnici v $\mathbf{R}$: $|x - 4| + 5|x - 1| + x - 5 > 3|x - 2|$
10. Sestrojte graf funkce $y = |x^2 + 3x - 4|$.
11. Řešte nerovnici v $\mathbf{R}$: $\dfrac{1}{|x + 2|} \geq 3$

Klíč k procvičuj

1. Nejdříve urči nulové body absolutních hodnot; ty jsou: $3-x=0 \Rightarrow x=3;\ 3+x=0 \Rightarrow x=-3$. Nulové body rozdělí definiční obor funkce. Řešení můžeš psát do tabulky:

$x \in$	$\mathrm{I} = (-\infty; -3)$	$\mathrm{II} = \langle -3; 3)$	$\mathrm{III} = \langle 3; \infty)$
$\lvert 3-x \rvert$	$3-x$	$3-x$	$-3+x$
$\lvert 3+x \rvert$	$-3-x$	$3+x$	$3+x$
$\lvert 3-x \rvert + \lvert 3+x \rvert$	$-2x$	6	$2x$



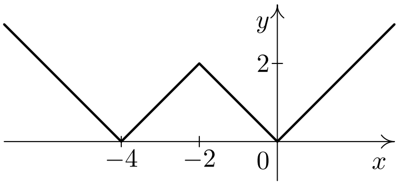
V každém intervalu je funkce předepsána bez absolutní hodnoty a můžeš zakreslit graf.

2. Správně je a). Určíš nulový bod absolutní hodnoty: $-x-1=0 \Rightarrow x=-1$
V tomto bodě tedy nabývá funkce nulové hodnoty a dotýká se osy x. Mimo tento bod funkce nabývá kladných hodnot, jak vyplývá z definice absolutní hodnoty.

3. Správně je b). Určíš nulový bod absolutní hodnoty: $1-x=0 \Rightarrow x=1$
V tomto bodě opět funkce nabývá nulové hodnoty a dotýká se osy x. Mimo tento bod nabývá záporných hodnot.

4. Správně je c). Určíš nulové body absolutních hodnot, které rozdělí definiční obor funkce do tří intervalů $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$, $(1; \infty)$. Na každém z těchto intervalů má funkce tvar postupně
$y = 2x,\ y = -2,\ y = -2x.$

5. Nejdříve sestrojíš graf funkce $y = |x+2| - 2$ stejným způsobem jako v předchozích úlohách. Na intervalu $(-4; 0)$, kde tato funkce nabývá záporných hodnot, dojde kvůli vnější absolutní hodnotě k překlopení záporných hodnot na kladné a vznikne charakteristický tvar velkého písmene W.



6. Určíš nulové body absolutních hodnot: $x-2=0 \Rightarrow x=2;\ x-4=0 \Rightarrow x=4$
Rovnici budeme řešit zvlášť na třech intervalech: $(-\infty; 2\rangle$, $\langle 2; 4\rangle$, $\langle 4; \infty)$
   1) Pro $x \in (-\infty; 2\rangle$ platí: $|x-2| = -(x-2) = -x+2,\ |x-4| = -(x-4) = -x+4$ Rovnice má tvar $\frac{1}{3}(-x+2) = 3(-x+4) \Rightarrow x = \frac{17}{4}$. V daném intervalu výsledek neleží, proto není kořenem.
   2) Pro $x \in \langle 2; 4\rangle$ platí: $|x-2| = x-2,\ |x-4| = -(x-4) = -x+4$
   Rovnice má tvar $\frac{1}{3}(x-2) = 3(-x+4) \Rightarrow x = \frac{19}{3}$. Výsledek v daném intervalu leží, tedy je kořenem.
   3) Pro $x \in \langle 4; \infty)$ platí: $|x-2| = x-2,\ |x-4| = x-4$
   Rovnice má tvar $\frac{1}{3}(x-2) = 3(x-4) \Rightarrow x = \frac{17}{4}$. Výsledek v daném intervalu leží, je tedy kořenem.

   Daná rovnice má dvě řešení $x_1 = \frac{19}{5}$, $x_2 = \frac{17}{4}$.

7. Určíš nulové body absolutních hodnot $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1;\ x-3=0 \Leftrightarrow x=3;\ 5-x=0 \Leftrightarrow x=5$. Rovnici budeme řešit zvlášť na čtyřech intervalech: $(-\infty; -1\rangle$, $\langle -1; 3\rangle$, $\langle 3; 5\rangle$, $\langle 5; \infty)$.
   1) Pro $x \in (-\infty; -1\rangle$ platí: $|x+1| = -x-1;\ |x-3| = -x+3;\ |5-x| = 5-x$
   Rovnice má tvar $2(-x-1) + (-x+3) = 5-x \Rightarrow x = -2$. Výsledek leží v daném intervalu, proto je kořenem rovnice.