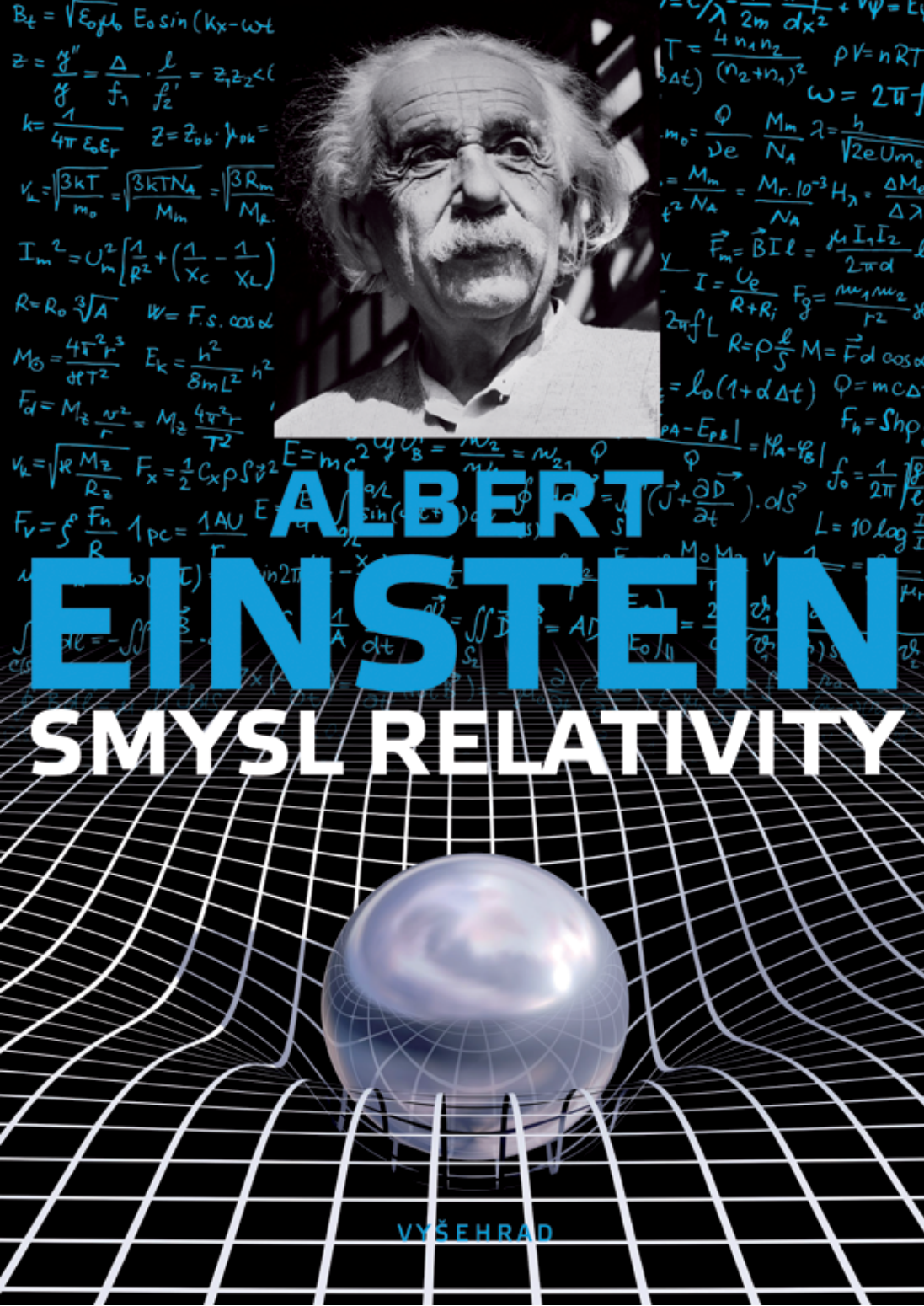
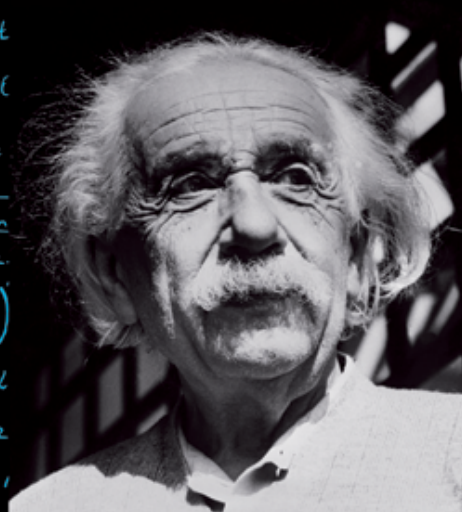




$$B_t = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} E_0 \sin(kx - \omega t)$$
$$z = \frac{f''}{f'} = \frac{\Delta}{f_1} \cdot \frac{l}{f_2'} = z_1 z_2 < 1$$
$$k = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \quad z = z_{ob} \cdot \gamma_{ok} =$$
$$v_k = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3kT N_A}{M_m}} = \sqrt{\frac{3R_m}{M_k}}$$
$$I_m^2 = U_m^2 \left[\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_c} - \frac{1}{X_L} \right) \right]$$
$$R = R_0 \sqrt[3]{A} \quad W = F \cdot s \cdot \cos \alpha$$
$$M_0 = \frac{4\pi^2 r^3}{3T^2} \quad E_k = \frac{h^2}{8mL^2} h^2$$
$$F_d = M_z \frac{v^2}{r} = M_z \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$
$$v_k = \sqrt{\frac{R M_z}{R_a}} \quad F_x = \frac{1}{2} C_x \rho S v^2$$
$$F_v = \int \frac{F_n}{R} \quad 1 \text{ pc} = \frac{1 \text{ AU}}{R}$$



$$T = \frac{4 n_1 n_2}{(n_2 + n_1)^2} \quad pV = nRT$$
$$\omega = 2\pi f$$
$$m_0 = \frac{Q}{ve} \frac{M_m}{N_A} \quad \lambda = \frac{h}{\sqrt{2eUm_e}}$$
$$f^2 \frac{M_m}{N_A} = \frac{M_r \cdot 10^{-3} H_\lambda}{N_A} \cdot \frac{\Delta M_0}{\Delta \lambda}$$
$$\vec{F}_m = \vec{B} I l = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} l$$
$$I = \frac{U_e}{R + R_i} \quad F_g = \frac{m_1 m_2}{r^2}$$
$$2\pi f L \quad R = \rho \frac{l}{S} \quad M = \vec{F} d \cos \alpha$$
$$= l_0 (1 + d \Delta t) \quad \Phi = m c \Delta$$
$$F_h = S h p$$
$$|v_A - v_B| = |v_A - v_B|$$
$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\epsilon}$$
$$L = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

ALBERT EINSTEIN

SMYSL RELATIVITY

VYŠEHRAĐ



ALBERT EINSTEIN
SMYSL RELATIVITY

**ALBERT
EINSTEIN
SMYSL
RELATIVITY**

VYŠEHRA D

Tato kniha vydaná původně roku 1922 podává text *Stafford Little Lectures*, které dr. Einstein přednesl roku 1921 na Princetonské univerzitě. Pro třetí vydání dr. Einstein připojil dodatek diskutující jisté pokroky v teorii relativity od roku 1921. Pro čtvrté vydání dr. Einstein připojil Dodatek II o své zobecněné teorii gravitace. V pátém vydání byl revidován důkaz z Dodatku II. Toto vydání je identické s pátým vydáním v Princeton University Press.

Text prvního vydání přeložil do angličtiny Erwin Plimpton Adams, první dodatek přeložil Ernst G. Strauss a druhý dodatek přeložila Sonja Bargmannová.

Z anglického originálu, *The Meaning of Relativity: Including the Relativistic Theory of the Non-Symmetric Field* (fifth edition), vydaného roku 2014 nakladatelstvím Princeton University Press,
přeložil a doslovem opatřil Jan Novotný
Obálku a grafickou úpravu navrhl Vladimír Verner
Redakčně zpracoval Vladimír Roskovec
Odpovědný redaktor Martin Žemla
E-knihu vydalo nakladatelství Vyšehrad, spol. s r. o.,
v Praze roku 2016 jako svou 1447. publikaci
Vydání v elektronickém formátu první
(podle prvního vydání v tištěné podobě)
Doporučená cena E-knihy 180 Kč

Nakladatelství Vyšehrad, spol. s r. o.,
Praha 3, Víta Nejedlého 15
e-mail: info@ivysehrad.cz
www.ivysehrad.cz

Albert Einstein

The Meaning of Relativity: Including the Relativistic Theory of the Non-Symmetric Field (fifth edition)

All rights reserved. No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage and retrieval system, without permission in writing from the Publisher.

Copyright © 1922, 1945, 1950, 1953 by Princeton University Press
Copyright © 1956 by the Estate of Albert Einstein
Copyright renewed 1984 by the Hebrew University of Jerusalem
Introduction © 2005 by Brian Greene
Translation © Jan Novotný, 2016
Epilogue © Jan Novotný, 2016

ISBN 978-80-7429-593-5

Tištěnou knihu si můžete zakoupit na www.ivysehrad.cz

ÚVOD

[*Brian Greene*]

Během jediného desetiletí Albert Einstein objevil speciální a poté obecnou teorii relativity a převrátil tím pojmy prostoru a času, kterých se lidé drželi po tisíce let. Přesto se mnozí z nás, přinejmenším intuitivně, stále přiklání k těmto vyvráceným pojmům. Prostor si představujeme jako netečné jeviště, na němž se odehrávají vesmírné události. O čase si představujeme, že je zaznamenáván univerzálními hodinami, které tikají stejně zde jako na Marsu či v galaxii Andromedy a kdekoliv jinde, bez ohledu na rozličná prostředí a fyzikální souvislosti. Pro většinu z nás neměnná věčnost prostoru a času patří mezi nejzákladnější vlastnosti reality. Držet se však takovýcho představ znamená držet se predeinsteinovského pohledu, který je nejen teoreticky neudržitelný, ale jak ukázaly četné experimenty, také prokazatelně mylný.

Pro profesionálního fyzika je snadné přivyknout relativitě. Ačkoliv relativistické rovnice byly nejprve udivujícími výroky vyjádřenými v jazyce matematiky, fyzikové dnes vpisují relativitu přímo do matematické mluvnice základní fyziky. V tomto rámci náležitě formulované matematické rovnice automaticky plně odpovídají relativitě, a kdo si tedy dobře osvojí několik matematických pravidel, je schopen bez překážek se orientovat v Einsteinových objevech. Ale přestože je relativita matematicky systemizována, drtivá většina fyziků by stále přiznala, že jim „nepřešla do krve“. I já si uvědomuji, jak snadné je upadnout do navyklého newtonovského myšlení, v němž jsou prostor a čas nesprávně nazírány jako vzájemně oddělené, nezávislé a neměnné. Ale zároveň jsem schopen zakoušet nezmenšující se obdiv, který pociťuji pokaždé, když si dostatečně povšímnu detailů skrytých v matematice přizpůsobené relativistické úspornosti a stanu tak tváří v tvář pravému *smyslu* relativity. Prostor a čas tvoří podloží reality. Důsledkem zemětřesení, které na této půdě vyvolala teorie relativity, není nic menšího než zdokonalení našeho základního chápání reality.

Co tedy relativita říká?

V roce 1905 Einstein publikoval v německém časopise *Annalen der Physik* pod skromným titulem „K elektrodynamice pohybujících se těles“ to, čemu dnes říkáme speciální teorie relativity. Článek vyrůstá z intelektuálního zápasu, který sváděl od svých šestnácti let s matematickým popisem pohybu světla, jak jej objevil v šedesátých letech 19. století James Clerk Maxwell. Stručně řečeno, v rozporu s tím, co bychom očekávali na základě Newtonových rovnic (a zdravého rozumu), Maxwellovy rovnice (jsou-li správně vyloženy) ukazují, že ať se paprsku světla ženete vstříc, nebo před ním prcháte, jeho rychlost vzhledem k vám bude stále stejná, jako kdybyste stáli – ani o kousíček větší či menší. Tato těžko zpochybnitelná konstantnost rychlosti světla vzrušovala na konci devatenáctého a na počátku dvacátého století ty nejpronikavější vědecké duchy, protože sice vycházela z rovnic a byla potvrzována stále přesnějšími měřeními, ale přesto se zdálo, že to nedává smysl. Jak by se světlo nemělo vůči nám pohybovat rychleji, když mu běžíme vstříc a světelný paprsek nás potkává? Jak by se světlo vůči nám nemělo pohybovat pomaleji, když před ním utíkáme? V této záležitosti Einstein všechno změnil. Rychlost je podílem prošlé vzdálenosti a doby, po kterou se daná vzdálenost prochází, a je tak intimně vázaná k pojmům prostoru a času. A jak hlásal Einstein, prostor a čas *nejsou* – v kontrastu k Newtonovu intuitivně rozumnému popisu – fixní a neměnné. Jsou naopak fluidní a tvárné. Prostor a čas se proměňují, aby udržely jako fixní a věčné něco jiného než sebe samy – rychlost světla, která nezávisí na tom, jak se pohybuje zdroj světla nebo jeho pozorovatel.

Fakticky to znamená, že když měříte délku objektu – ať je to auto, letadlo či cokoliv jiného – za pohybu, výsledek, který dostanete, je menší než v případě, že se objekt nepohybuje. A pozorujete-li pohybující se hodiny, zjistíte, že tikají v pomalejším tempu než stejné hodiny v klidu. Prostě řečeno, pro pohybující se objekt se prostorové vzdálenosti zkracují a čas se zpomaluje. Tyto podivuhodné vlastnosti prostoru a času zůstávaly do roku 1905 zcela skryty, protože byť jsou jejich projevy reálné, zůstávají nepatrné, dokud se uvažované rychlosti neblíží rychlosti světla. Bylo třeba génia, jakým byl Einstein, aby nahlédl za každodenní zkušenost a odhalil skutečnou povahu prostoru a času.

Objev obecné relativity vyrůstá ze speciální relativity, ale Einsteinovi trvalo dalších deset let, než jej dovršil. Hlavním popudem byl pro něho opět nápadný konflikt, na který narazil, když důkladně zkoumal některé z Newtonových dřívějších závěrů. V tomto případě byla v ohnisku jeho zájmu

gravitační síla, zvláště pak otázka, jak rychle se vliv gravitace šíří. Podle speciální teorie relativity se nic – žádný objekt, žádný signál, žádná informace – nemůže pohybovat z jednoho místa ve vesmíru na jiné místo větší rychlostí, než je rychlost světla. Ale jak si uvědomil Einstein, podle Newtonova zákona všeobecné gravitace masivní těleso, jako je Slunce, působí gravitační přitažlivostí na jiná tělesa, jako jsou planety, a to okamžitě. Podle Newtona platí, že kdyby Slunce nějak změnilo svou hmotnost nebo polohu, mohli bychom o změně okamžitě vědět, protože by se okamžitě změnilo gravitační působení Slunce na Zemi. A tato bezprostřední změna by přišla mnohem dříve, než dovoluje omezení dané nepřekročitelností rychlosti světla. Einsteinova motivace pro hledání nové teorie gravitace tedy nepovstala z konfliktu mezi Newtonovými rovnicemi a experimentálními daty, ale z konfliktu mezi Newtonovým popisem gravitace a Einsteinovou speciální teorií relativity. Pro teoretika, jakým byl Einstein, může být teoretická nekonzistence neméně významná nežli nesoulad vyvozený z experimentu a pozorování.

Řešení tohoto konfliktu nepřišlo hned. Roku 1912, asi po pěti letech přemýšlení, Einstein napsal svému příteli Arnoldu Sommerfeldovi, že „ve srovnání s pochopením gravitace byla speciální teorie relativity jen dětská hra“. Nicméně Einstein se do toho rozhodně pustil. Jeho cílem bylo pochopit mechanismus, jímž gravitace působí – především jak to 150 milionů kilometrů vzdálené Slunce *dělá*, aby ovlivnilo pohyb Země. Slunce se Země nikdy nedotýká, jak tedy síla, kterou nazýváme gravitací, komunikuje přes tak obrovské vzdálenosti v téměř prázdném prostoru? To je záhada, které si byl dobře vědom i Newton, když ve svých *Principiích* poznamenal, že není schopen stanovit způsob, jímž je gravitační působení přenášeno, a tudíž mu nezbývá než ponechat problém „na uvážení čtenářů“. Mnozí čtenáři tuto výzvu bezpochyby jen četli a četli, ale Einstein k tomu přistoupil jinak. Rozhodl se přijmout tuto dvě stě let starou výzvu v naději, že když pochopí, jak gravitace skutečně pracuje, bude moci rozřešit konflikt mezi Newtonovým popisem gravitace a omezením rychlosti, jež klade speciální teorie relativity.

Einsteinovy naděje se ukázaly být dobře podloženy. Roku 1915 přišel s obecnou teorií relativity, v níž určil pravou povahu prostoročasu jako prostředí, které přenáší gravitační sílu. Einstein se domníval, že jako těžký kámen ležící na trampolíně způsobuje, že blána se zakřiví – a ovlivňuje tím pohyb kuliček valících se po povrchu blány –, tak i velká astronomická

tělesa jako Slunce, Země či neutronová hvězda vloženy do prostoročasu způsobují, že *vesmír* se zakřivuje – a takto ovlivňují pohyby dalších těles ve své blízkosti. Když Země obíhá kolem Slunce, pak se podle obecné teorie relativity valí údolím v deformovaném prostoročasovém podkladu, který vytvořila přítomnost Slunce.

To je ohromující závěr. Ve speciální teorii relativity Einstein ukázal, že kosmické lešení nemůže být demontováno do podoby tuhé, univerzálně určené mříže v prostoru a v čase. Nyní v obecné teorii relativity pravil, že stavba kosmického lešení *reaguje* na přítomnost hmoty či energie a naopak stavba prostoročasu ovlivňuje pohyb objektů. Podle Einsteina se prostor a čas podílejí na vývoji vesmíru.

Závěr, který tak dramaticky změnil předcházející koncepce, si žádá dramatickou experimentální podporu. Prostřednictvím své matematické formulace, za kterou velmi vděčí prozíravým geometrickým myšlenkám Bernharda Riemanna z devatenáctého století, dává obecná teorie relativity přesné předpovědi, jak se objekty pohybují pod vlivem gravitační síly (tj. jak zakřivení prostoročasu ovlivňuje pohyb objektů). Porovnáme-li tyto předpovědi s předpověďmi Newtonovy teorie gravitace na základě experimentů a pozorování, Einsteinovy předpovědi se vždy ukáží přinejmenším o trochu přesnější, čímž se opravňuje nárok obecné teorie relativity na nástupnictví po Newtonově teorii. Prvořadě důležité pak je, že když Einstein vypočítal rychlost, již se deformace a zakřivení šíří prostorem – v jeho nové formulaci tedy rychlost gravitace –, byl výsledek neobyčejně potěšující. Na rozdíl od Newtonovy teorie, v níž se předpokládá, že gravitace se šíří okamžitě do jakékoliv vzdálenosti, v obecné teorii relativity se pohybuje právě *rychlostí světla* v plném souladu se základním požadavkem speciální teorie relativity, aby světlo nemohlo být ničím předstiženo.

Einstein publikoval obecnou teorii relativity roku 1916, což byl patrně pro naše pochopení prostoru a času ten vůbec nejdůležitější rok. V rámci obecné teorie relativity je speciální teorie nazírána jako zvláštní případ – uvažujeme v ní prostor a čas v nepřítomnosti podkládajícího rozložení hmoty a energie, jde tedy o prostor a čas v nepřítomnosti gravitace. Připojení gravitace, které Einstein objevil, vdechlo prostoročasu celou jeho neočekávanou tekutost a pružnost.

* * *

Během století od objevu relativity byl Einsteinův průlomový krok lépe pochopen a jeho důsledky pro poznání vesmíru byly plněji rozpoznány. Zde je pět vrcholů.

Za prvé se mnoho odehrálo na poli experimentů. Počáteční experimentální testy relativity byly poněkud nepřímé. Potvrzení obecnou teorií relativity předvídaného ohybu světla hvězd procházejícího v blízkosti Slunce, podané dvěma skupinami astronomů během zatmění slunce roku 1919, je právem považováno za pozorování, jež přesvědčilo svět o správnosti Einsteinovy nové teorie. Avšak bizarní předpovědi teorie relativity, že pohyb a gravitace mohou ovlivnit tempo běhu času, dlouho vzdorovaly přímému potvrzení. Pozorovaná skutečnost, že miony, částice s krátkou dobou života, které vznikají v horních vrstvách atmosféry srážkami s kosmickým zářením, jsou schopny přežít dlouhou cestu k zemskému povrchu (když se miony pohybují rychle, jejich vnitřní hodiny se vůči našim hodinám zpokojují, a proto takové miony žijí déle než jejich nehybné exempláře, což jim dovoluje cestu k povrchu Země dokončit), je krokem k přímějšímu potvrzení, ale kontrast mezi miliontinou sekundy života mionu a časovými intervaly, které zakoušíme v každodenním životě, může toto potvrzení stále činit odtazitém a ryze teoretickým. Experiment, který v roce 1971 provedli Joseph Hafele a Richard Keating, znamenal velký krok k překlenutí této mezery. Položili hodiny (ovšem atomové) na sedadlo v letadle společnosti Pan American a soustavně monitorovali jejich údaje během obletu kolem zeměkoule. Protože letadlo se pohybovalo a vzhledem k rostoucí vzdálenosti od středu Země se dostávalo do poněkud slabšího gravitačního pole, údaje hodin na palubě se měly lišit od hodin umístěných na zemském povrchu o několik miliardtin sekundy. A právě to experimentátoři zjistili a poskytli tak přímé potvrzení relativistického závěru, že běh času – skutečného času měřeného hodinami – je ovlivněn pohybem a gravitací.

Za druhé se také stále provádějí nové experimenty testující některé subtilnější důsledky relativity. Gravity Probe B, družice létající stovky kilometrů nad zemským povrchem, se snažila získat první přímé potvrzení relativistické předpovědi, že masivní těleso nejenom deformuje stavbu prostoročasu, ale pokud rotuje, vytváří v něm cosi jako vír. Po zaměření těch nejpreciznějších gyroskopů, jaké kdy byly vyrobeny, na zvolenou vzdálenou hvězdu, experimentátoři doufali, že se jim podaří potvrdit relativistickou předpověď, podle níž strhávání prostoročasu zemskou rotací stočí během roku osy palubních gyroskopů o stotisícinu stupně. Změření

tak nepatrného úhlu otočení je těžký úkol, ale po asi čtyřiceti letech vývoje experimentátoři věří, že to se svou technikou dokáží. Další nesnadný, ale nesmírně vzrušující experiment je hledání gravitačních vln. Obecná teorie relativity říká, že když se masivní objekt pohybuje, může způsobit rozvlnění prostoru, asi jako se rozvlní hladina rybníka, když do něho hodíme kamínek. Když taková vlna rozvlněného prostoru dorazí k Zemi, všechny hmotné objekty se budou při průchodu vlny deformující prostor natahovat v proměnlivém směru. Potíž se zachycením těchto gravitačních vln spočívá v tom, že když jsou vytvářeny běžnými jevy (rozbití šálku, srážka aut, odpálení výbušniny atd.), jsou příliš nepatrné, než aby mohly být postřehnuty, zatímco když je produkují katastrofické astrofyzikální události (přeměna hvězdy v supernovu, srážka černých děr atd.), jsou sice velké, ale na své dlouhé cestě k Zemi rychle slábnou. Vědci užívají obecné teorie relativity k výpočtu, že gravitační vlny vytvořené nejintenzivnějšími astrofyzikálními událostmi v typicky astronomických vzdálenostech by mohly změnit metrové tyče o miliontinu miliardtiny centimetru, což je mimořádně obtížné detekovat. Přesto jsou dnes ve Spojených státech v provozu dva detektory gravitačních vln (a ve světě je plánováno nebo pracuje mnoho dalších), které by aspoň v principu byly schopny změřit tak nepatrnou deformaci hmoty. Tento experiment je mimořádně důležitý hlavně proto, že úspěšná detekce gravitační vlny by znamenala více než jen potvrzení další předpovědi obecné relativity. Vzhledem k podstatné slabosti gravitační síly mohou gravitační vlny pronikat oblastmi, které jsou neprůhledné pro viditelné světlo a obecněji pro elektromagnetické záření. Proto by detekce gravitačních vln mohla velmi dobře otevřít novou oblast astronomie, v níž by se vesmír studoval pomocí gravitačního – a nikoliv elektromagnetického – záření. Někteří fyzikové dokonce doufají, že gravitační vlny mohou jednou posloužit k průhledu k samotnému velkému třesku.

Třetí výdobytek se opírá o práci Karla Schwarzschilda, německého fyzika, který krátce po Einsteinově publikaci obecné teorie relativity představil řešení Einsteinových rovnic s pozoruhodnými důsledky. Schwarzschild zjistil, že když se do dostatečně malého objemu napěchuje dostatečné množství hmoty (když se např. celá Země stlačí do balonu o průměru jeden centimetr), bude výsledné zdeformování prostoročasu tak silné, že nic – dokonce ani světlo – nebude schopno odolat výslednému mocnému gravitačnímu přitahování. Einsteina toto řešení překvapilo a domníval se, že extrémní podmínky předvídané Schwarzschildem nebudou v reálném

světě nikdy splněny. Dnes však pozorování užívající mocných pozemských i kosmických dalekohledů odhalují oblasti prostoupené intenzivními gravitačními poli, kde po spirálách dovnitř padající hmota vyzařuje a vydává spektrum rentgenového záření, které přesně odpovídá tomu, co se očekává od hmoty těsně před přechodem přes hranici některé ze Schwarzschildových „temných hvězd“ (později jim vynikající fyzik John Wheeler dal název „černé díry“). Tyto údaje téměř nedovolují pochybovat o tom, že černé díry jsou reálné, a snad dokonce všudypřítomné. Astronomové se dnes domnívají, že mnohé galaxie mají ve svých centrech gigantické černé díry. Pozorování například svědčí o tom, že v jádře naší vlastní galaxie Mléčné dráhy je černá díra o hmotnosti více než *třímilionkrát* větší, než jakou má Slunce. Důležitým problémem, který odolává řešení už více než dvacet pět let, je určení, co se děje v hlubokém nitru černé díry. Obecná teorie relativity jako by napovídala, že uprostřed černé díry končí čas, ale nikdo dosud nestanovil, co to skutečně znamená anebo zda by tento závěr mohly potvrdit úvahy založené na kvantové mechanice. Kdybychom si poradili s tímto problémem, byl by to hluboký průhled do základní povahy prostoru a času.

Za čtvrté je gravitace dominantní, když uvažujeme o velkých aglomeracích hmoty, jakými jsou hvězdy a galaxie. Největší možnou arénou pro uplatnění obecné teorie relativity je největší aglomerace, o jaké lze uvažovat: celek samotného vesmíru. Studium počátku a vývoje vesmíru se nazývá kosmologie a nepřekvapuje, že na tomto poli znamenala obecná teorie relativity revoluci. Před rokem 1916 nebyla nouze o kosmologie navrhované různými světovými teology a přírodními filosofy. S objevem obecné teorie relativity však kosmologie vstoupila do říše přísné vědy. Během pouhých několika roků se Einstein přesvědčil, že kosmologie založená na obecné relativitě je velice neočekávaná. Stavba prostoru založená na obecné teorii relativity nemůže být statická: vesmír se může rozpínat anebo smršťovat, ale nemůže zůstat nehybný. Dokonce i tak samorostlý myslitel, jakým byl Einstein, považoval tento závěr za příliš bizarní, než aby byl ochoten jej přijmout. Vesmír v největším měřítku „samozřejmě“ měl být fixní a neměnný. Aby se vyhnul problematickému důsledku obecné relativity, Einstein roku 1917 pozměnil své rovnice zavedením tzv. kosmologické konstanty – energie rovnoměrně rozložené v prostoru, která mohla působit odpuzování a tak nastolit rovnováhu s gravitační přitažlivostí a umožnit statický vesmír. Někteří z Einsteinových současníků – zejména belgický kněz Georges

Lemaitre a ruský matematik a meteorolog Alexandr Friedmann – si nebyli tak jisti, že vesmír se opravdu nemění, a tak ve dvacátých letech vytvořili řadu možných kosmologií vycházejících z rovnic obecné relativity, a to jak s kosmologickou konstantou, tak i bez ní. Všechny tyto kosmologie byly k dispozici v roce pro kosmologii přelomovém – 1929. V tomto roce Edwin Hubble, který užíval 100palcového dalekohledu observatoře na Mount Wilson, došel k závěru, že daleké galaxie se od nás vzdalují rychlostí úměrnou jejich vzdálenosti, což je v naprostém souladu s obecně relativistickými kosmologiemi, jak je matematicky vypracovali Lemaitre a Friedmann. Prostor se s časem nadouvá. Kdyby se Einstein odhodlal přijmout tento závěr své vlastní teorie relativity, mohl *předpovědět* rozpínání vesmíru o dvanáct let dříve, než bylo pozorováno. Dnes je kosmologie stále jednou z neaktivnějších oblastí teoretických a pozorovatelských výzkumů, jemněji propracované verze Lemaitrova a Friedmannova díla se rozvíjejí po celém světě a všechno je to založeno na rovnicích obecné teorie relativity. Takové výzkumy vedly k závěru, který mnozí fyzici považují za nejvýznamnější překvapení poslední dekády. A to je pátý vrchol.

Díky Hubbleovým pozorováním a mnoha navazujícím výzkumům, které potvrdily jeho závěry, se společenství fyziků přesvědčilo, že vesmír se rozpíná. Ale protože gravitace je přitažlivá síla – síla, která stahuje věci k sobě –, téměř každý byl také přesvědčen, že gravitační přitažlivost má za následek zpomalování expanze v čase. Zajímavým problémem pro výzkum pak bylo, jak určit rychlost zpomalování expanze, což by nám mělo dát informaci o tom, kolik hmoty vesmír obsahuje (více hmoty znamená větší gravitační přitažlivost, a tedy větší tempo zpomalování). Uprostřed devadesátých let se dva týmy snažily taková měření provést: Saul Perlmutter a jeho spolupracovníci v rámci projektu *Supernova Cosmology* a Brian Schmidt se svými kolegy v rámci programu *High-Z Supernova Search*. Koncem devadesátých let obě skupiny došly ke stejnému ohromujícímu závěru: rozpínání prostoru se nezpomaluje. Namísto toho jejich pozorování vzdálených supernov ukázala, že v posledních sedmi miliardách let se rozpínání prostoru *zrychlovalo*. Jak je to možné? To je otázka, s níž badatelé stále zápasí, ale favorizované vysvětlení se jakoby kruhem vrací zpět do roku 1917. Má-li vesmír kosmologickou konstantu právě té správné hodnoty, pak v něm až do doby před asi sedmi miliardami let nad odpuzováním převládala mocnější běžná přitažlivost hmoty. S tím, jak se vesmír rozpínal a hmota se v něm stále více rozplývala do prostoru,

gravitační přitažlivost se stále zmenšovala a u časového ukazatele sedm miliard se odpudivé působení kosmologické konstanty stalo dominantním. Od tohoto mezníku se tempo rozpínání prostoru zvyšuje – expanze prostoru se zrychluje, jak o tom svědčí současná pozorování.

Krátce řečeno, Einsteinův „omyl“ z roku 1917, zavedení odpudivé kosmologické konstanty, může být ve skutečnosti správný krok. Je-li tomu tak, Einstein sice určil špatnou hodnotu kosmologické konstanty (protože jí chtěl přesně vyrovnat gravitační přitažlivost, dokud nezesílí), ale samotná koncepce se osvědčila. V této chvíli zkoumání tempa zrychlování expanze prostoru vede badatele k závěru, že kosmologická konstanta odpovídá za zhruba 70 procent energie celého vesmíru – a tedy *většina* balíčku energie vesmíru může být docela dobře vyplněna touto mysteriózní neviditelnou entitou. Mnozí badatelé souhlasí, že plné porozumění povaze této neviditelné energie je jedním z nejdůležitějších problémů fyziky a kosmologie.

* * *

Poté, co Einstein uspěl se speciální teorií relativity ve spojení prostoru a času do sjednoceného celku, a poté, co uspěl s obecnou teorií relativity ve zjištění, že gravitační síla není nic jiného než deformování a zakřivení prostoročasu, zamyslel se nad tím, zda není možné jít dál a svést druhou tehdy známou sílu – elektromagnetickou – do geometrického rámce, který rozvíjel. Einstein si představoval jedinou teorii, snad vyjádřenou jediným principem či rovnicí, která by dokázala popsat všechny síly přírody. V posledních třiceti letech svého života hledal Einstein tuto tzv. jednotnou teorii s neúnavnou vášní, a ačkoli dokonce přicházely zprávy, že uspěl (jedna z nich se objevila na titulní stránce *New York Times*), pokaždé po přezkoumání výsledků došel k závěru, že cíle ještě nedosáhl. Přesto tyto neúspěchy neoslabovaly jeho víru ve sjednocení. Dokonce roku 1955, když se blížil k smrti v princetonské nemocnici, požádal o zápisník, do kterého chtěl zapsat rovnice v zoufalé naději, že by mu mohla v posledních chvílích života jednotná teorie vytanout na mysli. Nestalo se tak.

Mnoho let po Einsteinově smrti to vypadalo, že sen o jednotné teorii zemřel s ním. Ale koncem šedesátých a začátkem sedmdesátých let se to změnilo. Spojeným úsilím Sheldona Glashowa, Stevena Weinberga a Abduse Salama se slabá jaderná síla (o níž Einstein sotva co věděl, ale dnes ji pokládáme za původce radioaktivity) spojila s elektromagnetickou

silou v elektroslabou sílu – teorie pak byla experimentálně potvrzena na konci sedmdesátých let. Roku 1974 Glashow spolu se svým kolegou Howardem Georgim učinil první krok k rozvinutí „teorie velkého sjednocení“, v níž měly srůstat elektroslabá síla a silná jaderná síla (síla, o níž dnes víme, že drží pohromadě atomová jádra) do jediné matematické struktury. Ačkoliv jejich speciální model byl později experimentálně vyvrácen, mnozí fyzikové věří, že je jen otázka času, kdy bude nějaká verze velkého sjednocení potvrzena. Ale i přes tyto konkrétní kroky vstříc Einsteinovu snu o sjednocení je jedna síla, která tvrdošíjně stojí stranou. Všechny snahy vtělit do jednotné teorie sílu Einsteinovu srdci nejbližší, gravitaci, se ukázaly být teoreticky nekonzistentní.

Problém je, že kvantová mechanika, která je základem našeho popisu povahy tří negravitačních sil, se dostává do zásadních rozporů s Einsteinovým popisem gravitace. Důvod tkví, stručně řečeno, v tom, že einsteinovský obraz prostoru jako hladce zakřiveného geometrického útvaru radikálně odporuje ústřední myšlence kvantové teorie: principu neurčitosti. Roku 1927 Werner Heisenberg objevil, že kvantová mechanika vede k nevyhnutelné neurčitosti, která omezuje možnost přesného stanovení rozličných komplementárních fyzikálních veličin (jakými jsou třeba poloha částice a její rychlost). Tato neurčitost má za následek to, čemu fyzikové říkají „kvantové fluktuace“: částice, zhruba řečeno, se takto nevyhnutelně zmítají a jejich polohy i rychlosti fluktuují v rozmezí povoleném kvantovou neurčitostí. Tyto částicové fluktuace byly hodně studovány experimentálně a Heisenbergův princip neurčitosti byl potvrzen s vysokou přesností. Potíž však nastává, když se princip neurčitosti neaplikuje na obyčejné částice, ale na gravitační sílu. Protože gravitace v Einsteinově popisu není nic jiného než zakřivení prostoročasu, kvantové fluktuace gravitační síly nejsou nic jiného než fluktuace samotné konstrukce prostoročasu. Když fyzikové studovali tuto inkarnaci kvantové neurčitosti matematicky, zjistili, že na malých vzdálenostech a v malém časovém měřítku se kvantové gravitační fluktuace stávají tak velkými, že prostoročas přestane připomínat hladce zakřivenou geometrii, na níž Einstein založil obecnou teorii relativity. Namísto toho bude prostoročas připomínat zpěněný vařící kotel, v němž se prostor divoce zmítá způsobem, který Einsteinovy rovnice nezvládají.

Badatelé se po mnoho let snažili překonat tento nesoulad mezi obecnou teorií relativity a kvantovou mechanikou, ale teprve v sedmdesátých

a ještě výrazněji v osmdesátých letech byla teoreticky nalezena schůdná cesta, která by mohla vést k cíli. Superstrunová teorie napověděla, že tradiční koncepce, podle níž jsou fundamentálními částicemi přírody body zanedbatelně malé rozlohy, je nesprávná. Namísto toho teorie předpokládá, že nejzákladnější entity, z nichž se vytváří hmota, jsou nepatrná jednorozměrná vlákna energie, která by po dostatečném zvětšení vypadala jako malé kmitající struny. „Dostatečným“ se tu míní násobitel mnohemiliardkrát větší, než jakého je možno dosáhnout i našimi nejdůmyslnějšími přístroji, a tím superstrunová teorie vysvětluje, proč si fyzikové dlouho mysleli, že elementární částice musí být body.

Nemusí být patrné, že nám tento přechod od bodových částic ke strunám, které jsou tak malé, že vypadají jako body, příliš pomůže. Ale je tomu tak.

Superstrunová teorie úspěšně sblížuje obecnou relativitu a kvantovou mechaniku. Úplné vysvětlení, jak to dělá, je složité, zde nám však pro pochopení postačí hrubý nástin. Zavedeme-li struny jako základní ingredience, superstrunová teorie vychází ze staré myšlenky o bodových částicích a roztahuje ji – rozpíná ji – do nové myšlenky nepatrných vláken. Toto roztažení bodů ve vlákna vede také k tomu, že mikroskopická struktura prostoru se roztahuje ve srovnání s tím, jak byla nazírána (a jak byla matematicky modelována ve výpočtech) před superstrunovou teorií. Když struny roztahují prostor na mikroskopické úrovni, divoká zmítání, která byla zdrojem teoretického konfliktu mezi kvantovou mechanikou a obecnou teorií relativity, jsou rozepjata a tím rozředěna. A jak potvrzují detailní výpočty, toto rozředění divokých prostoročasových fluktuací je právě postačující k tomu, aby kvantová mechanika a obecná teorie relativity mohly srůst v matematicky konzistentní kvantovou teorii gravitace.

Superstrunová teorie však nejen spojuje obecnou relativitu s kvantovou mechanikou, ale má také prostředky k tomu, aby zahrnula – na stejném základě – elektromagnetickou, slabou i silnou sílu. V superstrunové teorii je každá z těchto sil prostě sdružena s jiným vzorem kmitání na struně. A tak jako je kytarový akord složen ze čtyř různých tónů, jsou čtyři síly přírody spojeny v hudbě superstrunové teorie. A co víc, totéž platí pro veškerou hmotu. Elektron, kvarky, neutrino a všechny další částice jsou v superstrunové teorii také popsány jako struny s rozličnými vzory kmitání. Takže všechna hmota a všechny síly jsou shrnuty do jedné přihrádky kmitajících strun – a jsou tedy právě tak sjednoceny, jak to má v jednotné teorii být.

Konečně si superstrunová teorie žádá, aby stavba vesmíru měla více než tři prostorové rozměry. To mohlo znít podivně a překvapivě, když to bylo vysloveno poprvé, ale je to myšlenka, která předchází supestrunové teorii a jednu dobu se jí věnoval i Einstein. Již roku 1919 německý matematik Theodor Kaluza zjistil, že když doplní čtvrtý rozměr prostoru a přeformuluje obecnou teorii relativity do tohoto rozšířeného prostředí, výsledný soubor rovnic zahrne rovnice původní Einsteinovy formulace a – neuvěřitelně – také rovnice Maxwellovy elektrodynamiky. Čtvrtý rozměr prostoru je tedy schopen rovnice gravitace a elektromagnetismu spojit. Po chvíli váhání se Einstein stal nadšeným stoupencem tohoto přístupu k sjednocení dvou sil, ale po letech výzkumu (s důležitými příspěvky Oskara Kleina) se tento tzv. Kaluzův-Kleinův přístup k unifikaci ukázal neschopným vyrovnat se s některými detaily (do tohoto rámce se například nedařilo vtělit elektron se známými hodnotami hmotnosti a náboje). Naopak v superstrunové teorii se Kaluzova-Kleinova myšlenka extrarozměrů *vynořuje* ze samotné teorie a problémy, které sužovaly stoupence původního Kaluzova-Kleinova přístupu, nevznikají. Navíc geometrie extrarozměrů – o nichž se obvykle předpokládá, že jsou v prostorovém ohledu velmi malé, abychom vysvětlili, proč je nepozorujeme – má vliv na to, jak struny kmitají (asi jako geometrie lesního rohu ovlivňuje vzory kmitání vzduchu, který prochází jeho vnitřkem, geometrie extrarozměrů ovlivňuje vzory kmitání strun), a tedy i na pozorovanou fyziku. To znamená, že geometrie prostoročasu může být spojena nejen s gravitační silou, jak to zjistil Einstein, ale skrze extrarozměry může geometrie postoročasu také určovat hmotnosti a náboje elementárních částic (tyto vlastnosti částic jsou určeny vzory kmitání strun, které jsou zase ovlivněny geometrií extrarozměrů). Zkrátka superstrunová teorie napovídá, že geometrie by mohla vysvětlit, proč je vesmír takový, jaký je.

Myslím, že kdyby byl Einstein naživu, našel by v superstrunové teorii mnoho přesvědčivého a vzrušujícího. Superstrunová teorie posunuje vpřed jeho hledání sjednocení. Vyplývá to z Einsteinovy filosofie, ztělesněné v obecné teorii relativity, která se při popisu vesmíru silně opírá o geometrické myšlenky. A superstrunová teorie ukazuje, jak se může obecná relativita stát slučitelnou s kvantovou mechanikou. Přesto by Einstein bezpochyby pohlížel na superstrunovou teorii také se značnou skepsí. Krátce po svém zveřejnění mohly být speciální i obecná teorie relativity podrobeny přísnému testování, a tak i když vedou k šokujícím důsledkům,

nezbývalo než brát je vážně, protože experimenty ukázaly, že fungují. Naopak superstrunová teorie dosud nenašla experimentální oporu. Učinit dvě experimentálně potvrzené teorie – obecnou teorii relativity a kvantovou teorii – slučitelnými znamená důležitý krok. Ale nikdo nebude přesvědčen, že superstrunová teorie je správná, že je to ta jednotná teorie, kterou Einstein hledal, ale nikdy nenašel, dokud nebude ona sama experimentálně potvrzena. Při rostoucích možnostech urychlovačů po celém světě a stále důmyslnějších dalekohledů sbírajících data s bezprecedentní přesností by se toto potvrzení mohlo zdařit ještě v tomto století. Pak budou Einsteinovy teorie relativity chápány jako část mnohem velkolepější teoretické syntézy. Nestane-li se to, fyzikové celého světa nepochybně přenesou hledání sjednocení na další cesty (některé jiné přístupy, jako smyčková kvantová gravitace, byly již značně rozvinuty a energicky se na nich pracuje). Einstein zapálil pochodně jednotné teorie. Fyzikové, kteří jdou a půjdou v jeho stopách, učiní všechno pro to, aby nepřestala hořet.

POZNÁMKA K ŠESTÉMU VYDÁNÍ

Pro toto vydání jsem kompletně zrevidoval „Zobecnění teorie gravitace“ a dal jsem mu název „Relativistická teorie nesymetrického pole“. Vedl mě k tomu úspěch, jehož jsem dosáhl – částečně ve spolupráci se svou asistentkou B. Kaufmanovou – při zjednodušení odvození i tvaru rovnic pole. Celá teorie se tak stala průhlednější, aniž se změnil její obsah.

Prosinec 1954

A. E.

PROSTOR A ČAS

V PŘEDRELATIVISTICKÉ FYZICE

Teorie relativity je nejtěsněji spojena s teorií prostoru a času. Začnu proto stručným přezkoumáním našich představ o prostoru a čase, ačkoliv si uvědomuji, že tím otevírám kontroverzní záležitost. Úkolem veškeré vědy, ať už jde o přírodní vědy nebo o psychologii, je uspořádat naše prožitky a dát jim podobu logického systému. Jak jsou naše vžitě představy o prostoru a čase spojeny s povahou našich prožitků?

Osobní prožitky se nám skládají do řady událostí a v této řadě se nám jednotlivé události, jak si na ně pamatujeme, jeví uspořádané podle kritéria „dříve“ a „později“, za něž už v analýze pokročit nedovedeme. Pro jednotlivce tedy existuje „Ich-čas“, subjektivní čas. Ten sám o sobě není měřitelný, mohu ovšem přiřadit událostem čísla tak, aby s pozdější událostí bylo spojeno větší číslo než s událostí dřívejší; povaha tohoto spojení může však být zcela libovolná. Toto spojení mohu uskutečnit pomocí hodin, když srovnávám pořadí událostí vytvářených hodinami s pořadím dané řady událostí. Hodinami může být jakýkoliv objekt, který poskytuje řadu událostí, jež lze odpočítávat, a má další vlastnosti, o nichž promluvíím později.

Pomocí jazyka si mohou rozličné osoby své prožitky do jisté míry porovnat. Pak se ukazuje, že určité smyslové vjemy rozličných osob si navzájem odpovídají, zatímco pro jiné smyslové vjemy žádnou takovou korespondenci stanovit nemůžeme.

Zvykáme si tak považovat za reálné ty smyslové vjemy, které jsou společné různým jednotlivcům a které jsou tedy do značné míry neosobní. Přírodní vědy a speciálně ta nejfundamentálnější z nich, fyzika, se zabývají takovými smyslovými vjemy. Představa fyzikálních těles, zejména tuhých těles, je relativně stálým komplexem takových smyslových vjemů. I hodiny jsou těleso či systém v témže smyslu, mají však tu přídavnou vlastnost, že řady událostí, které se na nich odpočítávají, jsou tvořeny elementy, které mohou být vesměs považovány za sobě rovné.

Jediné ospravedlnění pro naše pojmy a soustavy pojmů je v tom, že slouží k vyjádření komplexu našich zkušeností, mimo to žádné oprávnění nemají. Jsem přesvědčen, že filosofové měli neblahý vliv na pokrok vědeckého myšlení, když odstranili jisté fundamentální pojmy z oblasti empirismu, kde jsme je měli pod kontrolou, do nedosažitelných výšin *a priori*. Neboť i když by to mohlo vypadat, že vesmír idejí nelze logickou cestou vyvodit ze zkušenosti, nýbrž je v jistém smyslu výtvořem lidského ducha, bez něhož není žádná věda možná, přesto je právě tak málo nezávislý na povaze naší zkušenosti jako šaty na tvarech lidského těla. To zvláště platí pro naše pojmy času a prostoru, které fyzikové fakticky museli snést z Olympu *a priori*, aby je zpracovali a učinili použitelnými.

Přejděme nyní k našim pojmům a úsudkům o prostoru. I zde je podstatné věnovat bedlivou pozornost vztahům zkušenosti k našim pojmům. Myslím, že Poincaré to jasně rozpoznal ve své knize *La Science et l'Hypothèse*. Mezi všemi změnami, které můžeme vnímat na tuhém tělese, se mimořádnou jednoduchostí vyznačují ty, jichž můžeme vratně dosáhnout, když tělesy podle své vůle pohybujeme; Poincaré to nazval změnami polohy. Pomocí prostých změn polohy můžeme uvést tělesa do stavu, v němž se vzájemně dotýkají. Věty o shodnosti, podstatné pro geometrii, vyjadřují zákony, které platí pro takové změny polohy. Pro pojem prostoru se jeví jako podstatné toto: Můžeme vytvořit nová tělesa, když připojíme tělesa B , C , ... k tělesu A ; řekneme, že tím těleso A *prodlužujeme*. Můžeme prodloužit těleso A tak, že se dotýká libovolného jiného tělesa X . Soubor všech prodloužení tělesa A můžeme označit jako „prostor tělesa A “. Pak platí, že všechna tělesa jsou v „prostoru (libovolně zvoleného) tělesa A “. V tomto smyslu nemůžeme mluvit o abstraktním prostoru, ale pouze o „prostoru příslušném tělesu A “. Zemská kůra hraje v každodenním životě při posuzování relativních poloh těles natolik dominantní roli, že to vedlo k abstraktnímu pojetí prostoru, které je nepochybně neobhajitelné. Abychom se zbavili tohoto fatálního omylu, budeme mluvit pouze o „vztažných tělesech“ či o „vztažném prostoru“. Jak uvidíme později, upřesnění těchto pojmů učinila nezbytným až obecná teorie relativity.

Nebudu zacházet do detailů, co se týče vlastností vztažného prostoru, které vedly k tomu, že chápeme body jako elementy prostoru a prostor jako kontinuum. Nebudu se také pokoušet dále rozebírat vlastnosti prostoru, které ospravedlňují pojem spojitých řad bodů, čili křivek. Známe-li tyto pojmy a jejich vztahy k tuhým tělesům naší zkušenosti, je snadné říci, co

miníme třírozměrností prostoru; ke každému bodu lze přiřadit tři čísla (souřadnice) x_1, x_2, x_3 tak, že přiřazení je vzájemně jednoznačné a x_1, x_2, x_3 se spojitě mění, když bod prochází spojitou řadu bodů (křivku).

V předrelativistické fyzice se předpokládalo, že zákony konfigurace ideálních tuhých těles jsou slučitelné s eukleidovskou geometrií. Co tím míníme, lze vyložit následovně: Dva body vyznačené v tuhém tělese tvoří *interval*. Takový interval ve stavu klidu může být orientován vzhledem k našemu vztažnému prostoru mnoha způsoby. Jestliže nyní body tohoto prostoru mohou být vztaženy k souřadnicím x_1, x_2, x_3 tak, že rozdíly souřadnic $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ na dvou koncích intervalu dávají stejný součet kvadrátů

$$s^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 \quad (1)$$

pro každou orientaci intervalu, pak vztažný prostor nazveme eukleidovským a souřadnice nazveme kartézskými¹. Stačí ovšem učinit tento předpoklad pro limitní případ nekonečně malého intervalu. V tomto předpokladu je zahrnuto i něco poněkud méně speciálního, co však nemůžeme pominout, protože je to zásadně důležité. Za prvé se předpokládá, že můžeme ideální tuhá tělesa přemísťovat libovolným způsobem. Za druhé se předpokládá, že chování ideálních tuhých těles při změnách orientace je nezávislé na látce, z níž jsou tělesa vytvořena, a na změnách poloh těles, takže mohlo-li být jednou dosaženo splnutí dvou intervalů, může se toho znovu dosáhnout kdykoliv a kdekoliv. Oba tyto předpoklady, které jsou zásadně důležité pro geometrii a speciálně pro fyzikální měření, přirozeně vyplývají ze zkušenosti; v obecné teorii relativity stačí předpokládat jejich platnost pouze pro vztažná tělesa a prostory, které jsou ve srovnání s astronomickými rozměry nekonečně malé.

Veličinu s nazveme délkou intervalu. Aby mohla být jednoznačně určena, je nutné libovolně stanovit délku určitého intervalu; například ji můžeme položit rovnou 1 (jednotka délky). Pak mohou být stanoveny délky všech ostatních intervalů. Zvolíme-li x_v jako lineárně závislé na parametru λ

$$x_v = a_v + \lambda b_v$$

obdržíme křivku, která má všechny vlastnosti přímek eukleidovské geometrie. Zejména z toho snadno vyplývá, že uložíme-li n krát za sebou

¹ Tento vztah musí platit pro libovolnou volbu počátku a směru (poměry $\Delta x_1 : \Delta x_2 : \Delta x_3$) intervalu.

interval s podél přímky, dostaneme interval $n \cdot s$. Délka je tudíž výsledkem měření provedeného podél přímky užitím jednotkové měřicí tyče. Její pojem je stejně nezávislý na souřadnicové soustavě jako pojem přímky, jak to vyplýne z dalšího.

Přejdeme nyní k soustavě myšlenek, které hrají ve speciální i v obecné teorii relativity analogickou roli. Klademe otázku: jsou kromě kartézských souřadnic, kterých jsme použili, ještě jiné ekvivalentní souřadnice? Interval má fyzikální význam, který je nezávislý na volbě souřadnic; a tak je tomu i se sférickou plochou, kterou obdržíme jako soubor všech konců stejně dlouhých intervalů, jež vedeme z libovolného bodu naší vztažné soustavy. Jsou-li x_v právě tak jako x'_v (v probíhá hodnoty od 1 do 3) kartézské souřadnice našeho vztažného prostoru, pak sférická plocha bude v našich dvou soustavách souřadnic vyjádřena rovnicemi

$$\sum \Delta x_v^2 = \text{const.} \quad (2)$$

$$\sum \Delta x_v'^2 = \text{const.} \quad (2a)$$

Jak musíme vyjádřit x'_v pomocí x_v , aby rovnice (2) a (2a) byly vzájemně ekvivalentní? Považujeme-li x'_v za funkce x_v , můžeme podle Taylorovy věty pro malé hodnoty Δx_v psát

$$\Delta x'_v = \sum_{\alpha} \frac{\partial x'_v}{\partial x_{\alpha}} \Delta x_{\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial^2 x'_v}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} \Delta x_{\alpha} \Delta x_{\beta} \dots$$

Dosadíme-li tento vztah do (2a) a porovnáme s (1), vidíme, že x'_v musí být lineární funkcí x_v . Jestliže tedy klademe

$$x'_v = a_v + \sum_{\alpha} b_{va} x_{\alpha} \quad (3)$$

nebo

$$\Delta x'_v = \sum_{\alpha} b_{va} \Delta x_{\alpha} \quad (3a)$$

pak ekvivalence rovnic (2) a (2a) bude vyjádřena podmínkou

$$\sum \Delta x_v'^2 = \lambda \sum \Delta x_v^2 \quad (\lambda \text{ nezávisí na } \Delta x_v) \quad (2b)$$