

Řešené příklady z matematiky

Lineární algebra

Jaroslava Justová



e-kniha

MATIK

Řešené příklady z matematiky

LINEÁRNÍ ALGEBRA

RNDr. Jaroslava Justová

Matik Liberec

Copyright © Jaroslava Justová, 2015

E-knihu vydal:

Matik Liberec

Vydání první, 2015

ISBN 978-80-87711-06-4

Všechna práva vyhrazena. Tato e-kniha je určena pouze subjektu, který ji legálně zakoupil, a to jen pro osobní užití a v rozsahu stanoveném autorským zákonem. Je zakázáno jakékoli další kopírování, prodej a šíření textu nebo částí textu, včetně šíření prostřednictvím elektronické pošty, SMS zpráv, MMS zpráv apod. Dále je zakázáno umístění souboru na servery, ze kterých je možno soubor stáhnout, bez ohledu na to, kdo sdílení umožnil.

Úvodem

Tato učebnice je věnována důležité oblasti matematiky, lineární algebře. Je určena především vysokoškolským studentům prvních ročníků nematematických oborů, ale může být vhodnou pomůckou i pro studenty přírodovědných gymnázií a další zájemce o matematiku. Je zaměřena na srozumitelné vysvětlení postupů při řešení různých typů úloh a je vhodná nejen pro studenty denního, ale i kombinovaného studia.

Probírané učivo je rozděleno do devíti kapitol. V každé naleznete nejprve stručný přehled základních poznatků z teorie, následovaný řešenými příklady s podrobným komentářem a vysvětlením postupu výpočtu. Metodické zpracování odpovídá tomu, že lineární algebra je často náplní již 1. semestru, proto se zde nevyskytují úlohy, které by vyžadovaly větší znalosti z matematické analýzy. Zájemce o podrobnější výklad teorie s důkazy vět a náročnější příklady bych odkázala např. na literaturu [1], [2]. Mou snahou bylo zahrnout do učebnice všechna základní témata lineární algebry probíraná na nematematických oborech vysokých škol a poskytnout studentům rozsáhlý soubor řešených úloh vhodných pro přípravu na semináře a písemné testy.

Text vznikl na základě mých dlouholetých zkušeností s vyučováním matematiky na Technické univerzitě v Liberci, na Fakultě přírodovědně-humanitní a pedagogické. Praktická forma e-knihy umožňuje mít ji stále při ruce – ve čtečce, na počítači, v tabletu či v mobilu.

Věřím, že tato učebnice přispěje k lepšímu porozumění probírané látky a ke snazšímu zvládnutí Vašeho studia.

autorka

P.S. Vřele doporučuji si uvedené příklady nejen přečíst, ale také si je vypočítat, s průběžnou či závěrečnou kontrolou výsledku i postupu řešení. 😊

Obsah

1. Aritmetické vektory	6
2. Vektorový prostor	17
3. Matice	30
4. Soustavy lineárních rovnic	43
5. Determinant	56
6. Inverzní matice	71
7. Maticová algebra	84
8. Vlastní čísla a vlastní vektory	94
9. Kvadratické formy	101
Přehled matematických symbolů a značení	112
Literatura	114

1. Aritmetické vektory

Definice 1.1. *Aritmetickým n -rozměrným vektorem nazveme uspořádanou n -tici reálných čísel.*

Vektory značíme: $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $u_i \in R \ \forall i = 1, \dots, n$,
 $o = (0, 0, \dots, 0)$... nulový vektor.

Základní operace s aritmetickými vektory

Mějme vektory $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ a číslo $c \in R$.
Zavedeme:

- Součet vektorů u a v : $u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$.
- Reálný násobek vektoru u číslem c : $cu = (cu_1, cu_2, \dots, cu_n)$.

Definice 1.2. *Mějme n -rozměrné aritmetické vektory $u_1, u_2, \dots, u_k$. Lineární kombinací těchto vektorů nazveme vektor z , pro který platí:*

$$z = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_k u_k = \sum_{i=1}^k c_i u_i, \quad c_i \in R.$$

Reálná čísla c_i z definice se nazývají *koeficienty lineární kombinace*. Jsou-li všechny koeficienty nulové, pak se lineární kombinace nazývá *triviální* a jejím výsledkem je nulový vektor.

Lineární závislost a nezávislost vektorů

Lineární závislost a nezávislost je důležitou vlastností skupiny vektorů.

Definice 1.3. *Aritmetické vektory $u_1, u_2, \dots, u_k$ se nazývají lineárně závislé, jestliže existují čísla $c_1, c_2, \dots, c_k \in R$, z nichž aspoň jedno je nenulové, a přitom*

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_k u_k = o.$$

V opačném případě se vektory nazývají lineárně nezávislé.

Věta 1.1. *Vektory jsou lineárně závislé, právě když lze aspoň jeden z nich vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních.*

Z této věty plyne, že lineárně závislé jsou skupiny vektorů, kde jeden je násobkem jiného, jeden je součtem jiných, kde je obsažen nulový vektor apod. Z následující věty vyplývá, že závislé jsou vektory také tehdy, když je jejich počet větší, než kolik mají složek.

Věta 1.2. *Je-li k n -rozměrných vektorů a $k > n$, pak jsou vektory lineárně závislé.*

Obecně se lineární (ne)závislost zjišťuje:

a) řešením rovnice z definice – rovnice pro vektory se rozepíše podle jednotlivých složek a ze vzniklé soustavy rovnic se vypočítají čísla c_i . Pak platí, že vektory $u_1, u_2, \dots, u_k$ jsou

- lineárně závislé, jestliže $\exists c_i \neq 0$, že $\sum_{i=1}^k c_i u_i = 0$,
- lineárně nezávislé, jestliže $\sum_{i=1}^k c_i u_i = 0 \Rightarrow c_i = 0 \forall i = 1, \dots, k$.

b) výhodněji pomocí hodnosti matice (viz kapitola *Matice*).

Přidáme-li do skupiny lineárně závislých vektorů další vektor, bude nová skupina lineárně závislá. Odebereme-li ze skupiny lineárně nezávislých vektorů některý vektor, zůstane skupina lineárně nezávislá.

Poznámka

Dvojměrné vektory můžeme graficky znázornit v rovině orientovanou úsečkou z bodu $[0, 0]$. Dva lineárně závislé vektory jsou rovnoběžné, dva lineárně nezávislé vektory různoběžné. Analogicky lze znázornit trojměrné vektory v prostoru.

Skalární součin a norma aritmetických vektorů

Pro aritmetické vektory $u = (u_1, u_2, \dots, u_n), v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ zavádíme kromě základních operací sčítání a násobení reálným číslem i další operaci, a to *skalární součin vektorů* u a v s označením uv :

$$uv = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n = \sum_{i=1}^n u_iv_i.$$

Dva aritmetické vektory u, v se nazývají *ortogonální*, jestliže $uv = 0$. Navzájem ortogonální nenulové vektory jsou lineárně nezávislé.

Vlastnosti skalárního součinu (u, v, z jsou aritmetické vektory):

- $uu \geq 0 \wedge (uu = 0 \Leftrightarrow u = o)$,
- $uv = vu$,
- $(u + v)z = uz + vz$,
- $c(uv) = (cu)v, c \in R$.

Pomocí skalárního součinu zavedeme i další důležitý pojem, a to *norma vektoru* u , kterou značíme $\|u\|$:

$$\|u\| = \sqrt{uu}.$$

Vlastnosti normy (u, v jsou aritmetické vektory):

- $\|uu\| \geq 0 \wedge (\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = o)$,
- $\|cu\| = |c| \|u\|, c \in R$,
- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (tzv. trojúhelníková nerovnost).

Takto zavedená norma se nazývá eukleidovská. Normu aritmetického vektoru lze zavést i jinými způsoby (viz Příklad 1.16).

Poznámky

1) Při grafickém znázornění dvojrozměrných a trojrozměrných vektorů vyjadřuje norma vektoru jejich délku. Nenulové ortogonální vektory jsou na sebe kolmé.

2) Pro odchylku $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$ dvou nenulových vektorů platí vztah:

$$\cos \varphi = \frac{uv}{||u|| ||v||}.$$

3) Je-li $||u|| = 1$, vektor u se nazývá *normovaný*. Z libovolného vektoru u můžeme vytvořit normovaný vektor tak, že ho vydělíme jeho normou (tj. $u_0 = \frac{u}{||u||}$).

Řešené příklady

Příklad 1.1.

Jsou dány vektory $u_1 = (2, -3, 0)$, $u_2 = (2, 1, 6)$, $u_3 = (-1, 1, -1)$. Utvořte jejich lineární kombinace:

- a) $t = 7u_2$,
- b) $v = 4u_1 + 5u_3$,
- c) $w = 2u_1 - 2u_2 + u_3$.

Postup: Výpočet provedeme po složkách:

- a) $t = 7(2, 1, 6) = (14, 7, 42)$,
- b) $v = 4(2, -3, 0) + 5(-1, 1, -1) = (3, -7, -5)$,
- c) $w = 2(2, -3, 0) - 2(2, 1, 6) + (-1, 1, -1) = (-1, -7, -13)$.

Příklad 1.2.

Jsou dány vektory $t = (2, 4, -5)$, $u = (3, 1, -2)$, $v = (3, 6, -1, 1)$. Z následujících zápisů vyberte ty, které označují nějakou lineární kombinaci těchto vektorů:

$$2t, 3t - 8u, 2u + 4, -3v, tu, 2u + 6v, (0, 0, 0).$$

Postup: Lineární kombinace vektorů představují zápisy:

$$2t, 3t - 8u, -3v, (0, 0, 0).$$

Lineárními kombinacemi nejsou:

$2u + 4$... nelze k vektoru přičítat číslo,

tu ... lineární kombinací není skalární součin vektorů,

$2u + 6v$... nelze sčítat vektory s různým počtem složek.

Příklad 1.3.

Zjistěte, zda vektor $z = (1, 4, 0)$ je lineární kombinací vektorů u, v , kde $u = (-2, 1, 3)$ a $v = (1, -2, -2)$.

Postup: Podle definice lineární kombinace musíme zjistit, zda existují čísla c_1, c_2 , aby:

$$z = c_1 u + c_2 v,$$

$$(1, 4, 0) = c_1(-2, 1, 3) + c_2(1, -2, -2).$$

Rozepsáním po složkách dostaneme:

$$\begin{aligned} 1 &= -2c_1 + c_2, \\ 4 &= c_1 - 2c_2, \\ 0 &= 3c_1 - 2c_2. \end{aligned}$$

Dosazovací nebo sčítací metodou získáme řešení $c_1 = -2, c_2 = -3$.

Vektor z je lineární kombinací zadaných vektorů: $z = -2u - 3v$.

Příklad 1.4.

Podle definice zjistěte, zda vektory $(1, -1, 0, 2), (2, 0, 2, 3), (2, -4, 2, 1)$ jsou lineárně závislé, nebo lineárně nezávislé.

Postup: Z vektorů sestavíme lineární kombinaci s koeficienty c_1, c_2, c_3 a řešíme rovnici:

$$c_1(1, -1, 0, 2) + c_2(2, 0, 2, 3) + c_3(2, -4, 2, 1) = (0, 0, 0, 0).$$

Rozepsáním po složkách dostaneme soustavu:

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 + 2c_3 &= 0, \\ -c_1 - 4c_3 &= 0, \\ 2c_2 + 2c_3 &= 0, \\ 2c_1 + 3c_2 + c_3 &= 0. \end{aligned}$$

Dosazovací nebo sčítací metodou získáme jediné řešení $c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 0$, proto jsou vektory lineárně nezávislé.

Příklad 1.5.

Podle definice spočítejte, zda vektory $(-2, 1, 2)$, $(0, 1, 5)$, $(2, 0, 3)$ jsou lineárně závislé, nebo lineárně nezávislé.

Postup: Pro lineární kombinaci vektorů s koeficienty c_1, c_2, c_3 budeme řešit rovnici:

$$c_1(-2, 1, 2) + c_2(0, 1, 5) + c_3(2, 0, 3) = (0, 0, 0).$$

Rozepsáním po složkách dostaneme soustavu:

$$\begin{array}{rcl} -2c_1 & +2c_3 & = 0, \\ c_1 & +c_2 & = 0, \\ 2c_1 & +5c_2 & +3c_3 = 0, \\ \hline & c_3 & = c_1, \\ & c_2 & = -c_1, \\ 2c_1 & -5c_1 & +3c_1 = 0, \\ \hline 0 & & = 0. \end{array}$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení, tedy i řešení nenulové. Proto jsou zadané vektory lineárně závislé.

Příklad 1.6.

Zjistěte, pro které a jsou vektory $(4, -1, 2)$, $(1, 2, -1)$, $(1, a, 5)$ lineárně závislé.

Postup: Sestavíme lineární kombinaci s koeficienty c_1, c_2, c_3 a hledáme nenulové řešení rovnice:

$$c_1(4, -1, 2) + c_2(1, 2, -1) + c_3(1, a, 5) = (0, 0, 0).$$

Dostaneme soustavu:

$$\begin{array}{rrcr}
4c_1 & +c_2 & +c_3 & = 0, \\
-c_1 & +2c_2 & +ac_3 & = 0, \\
2c_1 & -c_2 & +5c_3 & = 0, \\
\hline
& & c_2 & = -4c_1 - c_3, \\
& & c_1 & = -c_3 \Rightarrow c_2 = 3c_3, \\
c_3 & +6c_3 & +ac_3 & = 0, \\
\hline
& c_3 & (a+7) & = 0.
\end{array}$$

Z 1. a 3. rovnice jsme vyjádřili c_2 a c_1 a dosadili je do 2. rovnice. Poslední rovnice má dvě řešení:

a) $c_3 = 0$, pak ale i $c_1 = 0, c_2 = 0$ a vektory by byly lineárně nezávislé pro každé a ,

b) $a = -7$ a pak může být c_3 libovolné nenulové číslo. Tedy pro hodnotu $a = -7$ jsou vektory lineárně závislé.

Příklad 1.7.

Mějme lineárně nezávislé vektory $u, v, w \in V_n$. Zjistěte, zda jsou vektory $(u - v), (u + w), (u + v - 2w)$ lineárně závislé, nebo lineárně nezávislé.

Postup: Sestavíme opět lineární kombinaci s koeficienty c_1, c_2, c_3 a řešíme rovnici:

$$\begin{aligned}
c_1(u - v) + c_2(u + w) + c_3(u + v - 2w) &= o, \\
(c_1 + c_2 + c_3)u + (c_3 - c_1)v + (c_2 - 2c_3)w &= o.
\end{aligned}$$

Protože vektory $u, v, w \in V_n$ jsou lineárně nezávislé, musí platit:

$$\begin{aligned}
c_1 + c_2 + c_3 &= 0, \\
-c_1 + c_3 &= 0, \\
c_2 - 2c_3 &= 0.
\end{aligned}$$

Soustava má jediné řešení $c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 0$, proto jsou vektory $(u - v), (u + w), (u + v - 2w)$ také lineárně nezávislé.

Poznámka

Lineární závislost a nezávislost vektorů se výhodněji zjišťuje pomocí hodnoty matice (viz kapitola *Matice*).

Příklad 1.8.

Ověřte vlastnost skalárního součinu aritmetických vektorů u, v a z :

$$(u + v)z = uz + vz.$$

Postup: Podle definice součtu vektorů a skalárního součinu vektorů rozepíšeme:

$$\begin{aligned}(u + v)z &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)(z_1, z_2, \dots, z_n) = \\&= (u_1 + v_1)z_1 + (u_2 + v_2)z_2 + \dots + (u_n + v_n)z_n = \\&= u_1z_1 + v_1z_1 + u_2z_2 + v_2z_2 + \dots + u_nz_n + v_nz_n = \\&= (u_1z_1 + u_2z_2 + \dots + u_nz_n) + (v_1z_1 + v_2z_2 + \dots + v_nz_n) = uz + vz.\end{aligned}$$

Tím jsme vlastnost dokázali pro libovolné n -rozměrné vektory.

Příklad 1.9.

Jsou dány vektory $u = (3, 3, -3)$, $v = (1, 2, 3)$, $z = (-2, 4, -2)$. Najděte dvojice vektorů, které jsou navzájem ortogonální.

Postup: Spočítáme všechny jejich skalární součiny:

$$\begin{aligned}uv &= (3, 3, -3)(1, 2, 3) = 3 + 6 - 9 = 0, \\uz &= (3, 3, -3)(-2, 4, -2) = -6 + 12 + 6 = 12, \\vz &= (1, 2, 3)(-2, 4, -2) = -2 + 8 - 6 = 0.\end{aligned}$$

Navzájem ortogonální jsou dvojice vektorů uv a vz .

Příklad 1.10.

Spočtěte, pro která $t \in \mathbb{R}$ jsou vektory $u = (5, 4, t)$ a $v = (t, 1, t)$ ortogonální.

Postup: Pro ortogonální vektory platí, že jejich skalární součin musí být roven 0. Tedy:

$$(5, 4, t)(t, 1, t) = 5t + 4 + t^2$$

a řešíme kvadratickou rovnici:

$$t^2 + 5t + 4 = 0 \Rightarrow (t + 1)(t + 4) = 0 \Rightarrow t = -1 \vee t = -4.$$

Dvojice ortogonálních vektorů jsou:

a) $u = (5, 4, -1), v = (-1, 1, -1),$

b) $u = (5, 4, -4), v = (-4, 1, -4).$

Příklad 1.11.

Ověřte vlastnost normy aritmetických vektorů pro $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$:

$$||cu|| = |c| ||u||, \quad c \in R.$$

Postup: Podle definice normy rozepíšeme:

$$\begin{aligned} ||cu|| &= \sqrt{(cu_1)^2 + (cu_2)^2 + \dots + (cu_n)^2} = \sqrt{c^2(u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2)} = \\ &= |c| \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2} = |c| ||u||. \end{aligned}$$

Tím jsme vlastnost dokázali pro libovolný vektor u .

Příklad 1.12.

Jsou dány vektory $v = (-3, 1, 2, -7, 1), w = (4, 6, -4, 0, 8)$. Spočítejte jejich skalární součin a jejich normy.

Postup:

a) Skalární součin: $vw = \sum_{i=1}^5 v_i w_i = -12 + 6 - 8 + 0 + 8 = -6.$

b) Normy: $||v|| = \sqrt{vv} = \sqrt{9 + 1 + 4 + 49 + 1} = \sqrt{64} = 8,$
 $||w|| = \sqrt{ww} = \sqrt{16 + 36 + 16 + 0 + 64} = \sqrt{132} = 2\sqrt{33},$

nebo upravíme: $w = (4, 6, -4, 0, 8) = 2(2, 3, -2, 0, 4)$ a

$$||w|| = ||2(2, 3, -2, 0, 4)|| = 2\sqrt{4 + 9 + 4 + 0 + 16} = 2\sqrt{33}.$$

Příklad 1.13.

Najděte normovaný vektor z , který je násobkem vektoru $u = (2, 2, 1)$.

Postup: Hledáme vektor z , $z = ku = (2k, 2k, k)$, aby $\|z\| = 1$:

$$\begin{aligned}\|z\| &= \sqrt{4k^2 + 4k^2 + k^2} = \sqrt{9k^2} = 3|k| \\ 3|k| &= 1 \Rightarrow k = \pm \frac{1}{3} \\ \Rightarrow z_1 &= \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad z_2 = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right).\end{aligned}$$

Zadaná úloha má tedy dvě řešení.

Příklad 1.14.

Jsou dány vektory $u = (-2, 2, 0)$ a $v = (-1, 2, 1)$. Spočítejte jejich odchylku φ a rozhodněte, zda jsou ortogonální.

Postup: Pro odchylku $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$ platí:

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{uv}{\|u\| \|v\|}, \\ \cos \varphi &= \frac{2 + 4 + 0}{\sqrt{4 + 4 + 0} \sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{6}{\sqrt{8} \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Rightarrow \varphi &= \frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

Odchylka vektorů u, v je $\varphi = \frac{\pi}{6}$, vektory ortogonální nejsou.

Příklad 1.15.

Ověřte, že pro dva ortogonální vektory $u, v \in V$ a eukleidovskou normou $\|u\|$ platí:

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Postup: Pro ortogonální vektory je $uv = vu = 0$:

$$\|u + v\|^2 = (u + v)(u + v) = uu + uv + vu + vv = uu + vv = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

(V prostoru V_2 tento vztah vyjadřuje Pythagorovu větu.)

Příklad 1.16.

Pro n -rozměrné vektory lze zavést i jiné normy než normu eukleidovskou. Pro $u = (u_1, \dots, u_n)$ se používá např. norma:

$$||u|| = \max |u_i|, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Ověřte pro ni základní vlastnosti normy:

- a) $\forall u \in V_n \quad (||u|| \geq 0) \wedge (||u|| = 0 \Leftrightarrow u = 0),$
- b) $\forall u \in V_n \quad \forall c \in R \quad ||cu|| = |c| ||u||,$
- c) $\forall u, v \in V_n \quad ||u + v|| \leq ||u|| + ||v||.$

Postup: Pro všechny $u, v \in V_n, c \in R$ plyne z vlastností absolutní hodnoty:

- a) $\max |u_i| \geq 0, \quad \max |u_i| = 0 \Leftrightarrow u = (0, 0, \dots, 0).$
- b) $||cu|| = \max |cu_i| = \max \{|cu_1|, \dots, |cu_n|\} = |c| \max \{|u_1|, \dots, |u_n|\} = |c| ||u||.$
- c) $||u + v|| = \max |u_i + v_i| \leq \max |u_i| + \max |v_i| = ||u|| + ||v||,$

přičemž maxima jsme určovali vždy pro $i = 1, \dots, n$. Základní vlastnosti uvedené normy jsou tedy splněny.

2. Vektorový prostor

Definice 2.1. *Neprázdná množina V se nazývá vektorový (příp. lineární) prostor nad R , jestliže:*

a) $\forall u, v \in V$ je $(u + v) \in V$,

b) $\forall u \in V, \forall k \in R$ je $ku \in V$,

c) $\forall u, v, z \in V, \forall c, d \in R$ platí:

1) $u + v = v + u$,

2) $(u + v) + z = u + (v + z)$,

3) $\exists o \in V$, že $\forall u \in V$ $u + o = u$,

4) $\forall u \in V$ $\exists (-u) \in V$, že $u + (-u) = o$,

5) $1u = u$,

6) $c(du) = (cd)u$,

7) $c(u + v) = cu + cv$,

8) $(c + d)u = cu + du$.

Prvky vektorového prostoru se obecně nazývají vektory.

Vlastnosti a), b) znamenají, že množina V je tzv. *uzavřená* vzhledem k operaci sčítání a je *uzavřená* vzhledem k operaci násobení reálným číslem. Vlastnosti 1), 2), 7), 8) představují komutativní, asociativní a distributivní zákony, vlastnosti 3) a 4) zaručují existenci nulového prvku (o) a existenci opačného prvku pro $\forall u \in V$.

Vektorovým prostorem mohou být různé typy množin s definovanými operacemi sčítání a násobení číslem – množina posloupností, množina reálných funkcí atd. (viz příklady) a je jím i jednoprvková množina $V = \{0\}$. Důležitý vektorový prostor tvoří také aritmetické n -rozměrné vektory se zavedenými operacemi sčítání a násobení reálným číslem.

Značení:

$V, L, (V, +, \cdot), (L, +, \cdot)$ – obecný vektorový prostor se zadanými operacemi,

V_n – aritmetický vektorový prostor n -rozměrný (např. $V_2, V_3, \dots$),

V_∞ – prostor posloupností.

Poznámka

Vektorový prostor lze zavést i nad $\mathbb{C}$ (komplexní čísla), ale my se budeme zabývat jen vektorovým prostorem nad $\mathbb{R}$. Ten dále stručně nazýváme jen *vektorový prostor*.

Definice 2.2. *Neprázdná podmnožina W vektorového prostoru $(V, +, \cdot)$ se nazývá podprostorem V , jestliže $\forall u, v \in W$ a $\forall k \in \mathbb{R}$ je $u + v \in W$ a $ku \in W$.*

Podprostor je tedy uzavřený vzhledem ke sčítání i k násobení reálným číslem, a protože v něm jsou splněny i ostatní podmínky z definice ($W \subset V$), je sám také vektorovým prostorem vzhledem k operacím definovaným na V .

Definice 2.3. *Mějme množinu vektorů $M = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$, $M \subset V$. Lineárním obalem množiny M nazveme množinu*

$$[M] = \{z, z = \sum_{i=1}^k c_i u_i, c_i \in \mathbb{R}, u_i \in M\}.$$

Lineární obal množiny vektorů je tedy množina všech lineárních kombinací těchto vektorů (tj. všechny součty a násobky). Značí se také $L(M), [u_1, u_2, \dots, u_k]$.

Věta 2.1. *Je-li $M \subset V$, pak $[M]$ je podprostorem V .*

Jestliže pro nějakou množinu $M = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ platí, že $[M] = V$, pak říkáme, že M je *množinou generátorů* prostoru V (M generuje V , vektory z M jsou určující skupinou prostoru V).

Věta 2.2. (Steinitzova, o výměně) *Mějme vektorový prostor V a jeho množinu generátorů $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$. Jsou-li vektory $v_1, v_2, \dots, v_k$*

lineárně nezávislé, pak je $k \leq n$ a při vhodném očíslování je množina $\{v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_n\}$ také množinou generátorů prostoru V .

Báze a dimenze vektorového prostoru

Vlastnost lineární závislosti či nezávislosti vektorů lze definovat v libovolném vektorovém prostoru analogicky k definici 1.3.

Definice 2.4. Vektory $u_1, u_2, \dots, u_k$, kde $u_i \in V$, se nazývají lineárně závislé, jestliže existují čísla $c_1, c_2, \dots, c_k$, že

$$\sum_{i=1}^k c_i u_i = 0 \quad \wedge \quad \exists c_i \neq 0.$$

V opačném případě se vektory nazývají lineárně nezávislé.

Definice 2.5. Množina vektorů $M = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, $M \subset V$, se nazývá báze vektorového prostoru V , jestliže platí:

- a) vektory $u_1, u_2, \dots, u_n$ jsou navzájem lineárně nezávislé,
- b) $[M] = V$.

Bázi vektorového prostoru si můžeme představit jako „nejmenší“ množinu (lineárně nezávislých) vektorů, která tento prostor generuje. Ve V_n je bází např. množina $M = \{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, 1)\}$. Tato báze, obsahující jednotkové vektory, se nazývá báze *kanonická* (též *standardní*).

Definice 2.6. Má-li báze M konečný počet prvků, pak se počet prvků báze M nazývá *dimenze* (hodnota) vektorového prostoru V a prostor V se nazývá *konečněrozměrný*.

Značení: $\dim V$, $h(V)$.

Je $\dim V_n = n$, tj. $\dim V_2 = 2$ atd. Pro „nejmenší“ vektorový prostor $V = \{o\}$ je $\dim V = 0$. Je-li W podprostorem V , pak $\dim W \leq \dim V$.

Věta 2.3. *Mějme vektorový prostor V , $\dim V = n$. Množina M je bází prostoru V , právě když lze každý vektor $z \in V$ vyjádřit jednoznačným způsobem jako lineární kombinaci vektorů z báze.*

Koeficienty této lineární kombinace nazýváme *souřadnice vektoru z vzhledem k bázi M* .

Věta 2.4. *Mějme vektorový prostor V , $\dim V = n$. Pak platí:*

- a) Každá báze prostoru V má právě n prvků.*
- b) Každá skupina n lineárně nezávislých vektorů z V je bází prostoru V .*
- c) Každá skupina lineárně nezávislých vektorů z V má nejvýše n prvků.*
- d) Každou skupinu k lineárně nezávislých vektorů z V , $k < n$, lze doplnit na bázi V .*

Normovaný vektorový prostor

V obecném vektorovém prostoru můžeme opět zavést pojem skalární součin vektorů, a to pomocí zobrazení:

Definice 2.7. *Mějme vektorový prostor V . Zobrazení $V \times V \rightarrow R$, které dvojici vektorů $u, v \in V$ přiřadí číslo uv , nazveme skalární součin, jestliže platí:*

- a) $\forall u \in V \quad (uu \geq 0) \wedge (uu = 0 \Leftrightarrow u = o)$,*
- b) $\forall u, v \in V \quad uv = vu$,*
- c) $\forall u, v \in V, \forall k \in R \quad k(uv) = (ku)v$,*
- d) $\forall u, v, z \in V \quad (u + v)z = uz + vz$.*

Analogicky jako pro aritmetické vektory se v prostoru V zavádí též ortogonalita vektorů a eukleidovská norma. Vektorový prostor se zavedenou normou se nazývá normovaný vektorový prostor.

Báze M prostoru V , ve které jsou každé dva vektory navzájem

ortogonální, se nazývá *ortogonální báze*. Ve V_n je ortogonální bází např. báze kanonická.

Řešené příklady

Příklad 2.1.

Zjistěte a zdůvodněte, zda uvedené číselné množiny s operacemi sčítání čísel a násobení reálným číslem tvoří vektorový prostor:

- a) množina přirozených čísel N ,
- b) množina celých čísel Z ,
- c) množina reálných čísel R .

Postup:

a) Množina N je uzavřená vůči sčítání, ale není uzavřená vůči násobení reálným číslem (např. pro $n \in N$: $-2n \notin N$), také nemá nulový ani opačné prvky. Množina N tedy vektorovým prostorem není.

b) Množina Z je uzavřená vůči sčítání a má nulový i opačné prvky, ale opět není uzavřená vůči násobení reálným číslem (např. pro $5 \in Z$: $5 \cdot \frac{2}{3} \notin Z$). Množina Z vektorovým prostorem není.

c) Množina R je uzavřená vůči sčítání i vůči násobení reálným číslem, obsahuje nulový prvek 0, každé číslo má opačný prvek ($\forall a \in R$ je $-a \in R$) a reálná čísla splňují i všechny další podmínky z definice. Proto množina reálných čísel tvoří vektorový prostor. Lze zapsat: $R = V_1$.

Příklad 2.2.

Zjistěte, zda uvedené množiny jsou podprostorem prostoru V_2 :

- a) $A = \{(1, a); a \in R\}$,
- b) $B = \{(b, 0); b \in R\}$.

Postup:

a) Množina A je neprázdnou podmnožinou V_2 , ale není uzavřená ani vůči sčítání, ani vůči násobení reálným číslem:

- např.: $(1, 3) + (1, 4) = (2, 7)$, $(\mathbf{2}, 7) \notin A$,
- např.: $5(1, 3) = (5, 15)$, $(\mathbf{5}, 15) \notin A$.

b) Množina B je neprázdnou podmnožinou V_2 . Ověříme pro ni, zda je uzavřená vůči sčítání i násobení reálným číslem:

- pro $b_1, b_2 \in R$: $(b_1, 0) + (b_2, 0) = (b_1 + b_2, \mathbf{0}) \in B$,
- pro $k \in R, b_1 \in R$: $k(b_1, 0) = (kb_1, \mathbf{0}) \in B$.

Množina B je uzavřená vůči oběma operacím a je tedy podprostorem vektorového prostoru V_2 .

Příklad 2.3.

Rozhodněte, jestli je množina $S = \{(a, a, a, a); a \in R\}$ podprostorem prostoru V_4 .

Postup: Množina S obsahuje pouze vektory, které mají všechny složky stejné. Je neprázdná a je $S \subset V_4$. Stačí ověřit, že je uzavřená vůči sčítání a násobení reálným číslem:

- pro $a, b \in R$: $(a, a, a, a) + (b, b, b, b) = (a + b, a + b, a + b, a + b) \in S$,
- pro $k \in R, a \in R$: $k(a, a, a, a) = (ka, ka, ka, ka) \in S$.

Množina S je uzavřená vůči oběma operacím, je tedy podprostorem vektorového prostoru V_4 .

Příklad 2.4.

Zjistěte a zdůvodněte, zda následující množiny funkcí s obvyklými funkčními operacemi jsou vektorovým prostorem:

- F_J – množina všech funkcí definovaných na intervalu J ,
- K_J – množina všech funkcí kladných na intervalu J ,
- C_J – množina všech funkcí spojitých na intervalu J .

Je některá podprostorem jiného prostoru?

Postup:

- Množina F_J vektorovým prostorem je, protože součet dvou funkcí i reálný násobek jsou opět funkce definované na J . Nulovým prv-
kem je konstantní nulová funkce a jsou splněny i ostatní podmínky

z definice vektorového prostoru. Např.: $\forall f, g \in F_J : f + g = g + f$, protože

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x).$$

b) Množina K_J vektorovým prostorem není, protože není uzavřená vzhledem k násobení reálným číslem, také neobsahuje nulový ani opačné prvky.

c) Množina spojitých funkcí C_J vektorovým prostorem je: součet dvou spojitých funkcí i reálný násobek jsou opět funkce spojitě na J , nulová funkce je spojitá (tj. nulový prvek do C_J náleží) a jsou splněny i ostatní podmínky z definice vektorového prostoru.

Množina spojitých funkcí C_J je podprostorem prostoru F_J .

Příklad 2.5.

Zjistěte a zdůvodněte, zda následující množiny polynomů definovaných na R s obvyklými funkčními operacemi jsou vektorovým prostorem:

- a) P – množina všech polynomů,
- b) P_n – množina všech polynomů nejvýše n -tého řádu, $n \in N, n$ pevné,
- c) Q_n – množina všech polynomů právě n -tého řádu, $n \in N, n$ pevné.

Je některá podprostorem jiného známého prostoru?

Postup:

a) Množina P vektorovým prostorem je, protože součet dvou polynomů i reálný násobek jsou opět polynomy. Nulovým prvkem je nulová funkce (nulový polynom), opačnými prvky jsou polynomy s opačnými znaménky a jsou splněny i ostatní podmínky z definice vektorového prostoru.

b) Množina P_n je vektorovým prostorem také, protože sčítáním a násobením reálným číslem se stupeň polynomu nezvýší. Podmínky z definice vektorového prostoru jsou splněny.

c) Množina Q_n vektorovým prostorem není, neboť není uzavřená vzhledem ke sčítání – součet dvou polynomů může být nižšího řádu než n , např. $(x^n + 5) + (-x^n)$.

Toto je pouze náhled elektronické knihy. Zakoupení její plné verze je možné v elektronickém obchodě společnosti eReading.