

Finanční matematika pro každého

8. rozšířené vydání

J. Radová, P. Dvořák, J. Málek

věcné a matematické vysvětlení
základních finančních pojmů

metody pro praktické rozhodování
soukromých osob i podnikatelů

nové finanční produkty

výborná učebnice pro studenty
středních a vysokých škol

řešené praktické příklady

Finanční matematika pro každého

8. rozšířené vydání

J. Radová, P. Dvořák, J. Málek



Grada Publishing

Upozornění pro čtenáře a uživatele této knihy

Všechna práva vyhrazena. Žádná část této tištěné či elektronické knihy nesmí být reprodukována ani šířena v papírové, elektronické či jiné podobě bez předchozího písemného souhlasu nakladatele. Neoprávněné užití této knihy bude **trestně stíháno**.

Edice Osobní a rodinné finance

**doc. RNDr. Jarmila Radová, Ph.D., doc. Ing. Petr Dvořák, Ph.D.,
doc. Mgr. Jiří Málek, Ph.D.**

Finanční matematika pro každého

8. rozšířené vydání

TIRÁŽ TIŠTĚNÉ PUBLIKACE:

Vydala GRADA Publishing, a.s.
U Průhonu 22, Praha 7,
jako svou 5287. publikaci

Realizace obálky Jan Dvořák
Foto na obálce Allphoto.cz
Sazba Antonín Plicka
Odpovědná redaktorka Ing. Michaela Průšová
Počet stran 304
Osmé vydání, Praha 1993, 1997, 2001, 2003, 2005, 2007, 2009, 2013
Vytiskly Tiskárny Havlíčkův Brod, a.s.

© GRADA Publishing, a.s., 2013

ISBN 978-80-247-4831-3

ELEKTRONICKÉ PUBLIKACE:

ISBN 978-80-247-8721-3 (ve formátu PDF)

GRADA Publishing: *tel.: 234 264 401, fax: 234 264 400, www.grada.cz*

Obsah

Předmluva	7
1. Základní pojmy	9
1.1 Procentový počet	9
1.2 Funkce	11
1.3 Průměry	18
1.4 Posloupnosti a řady	20
2. Úročení	24
2.1 Základní pojmy	24
2.2 Typy úročení	27
2.3 Jednoduché úročení polhůtní	27
2.4 Základní rovnice pro jednoduché polhůtní úročení	33
2.5 Současná a budoucí hodnota při jednoduchém úročení	36
2.6 Diskont	38
2.7 Vztah mezi polhůtní úrokovou sazbou a diskontní sazbou	40
3. Složené úročení	47
3.1 Základní rovnice pro složené úročení polhůtní	47
3.2 Kombinace jednoduchého a složeného úročení – smíšené úročení	52
3.3 Výpočet doby splatnosti	56
3.4 Současná hodnota při složeném úročení	58
3.5 Výpočet výnosnosti (úrokové sazby)	66
3.6 Výpočet úroku	67
3.7 Srovnání jednoduchého a složeného úročení	68
3.8 Efektivní úroková sazba	69
3.9 Úroková intenzita – spojitě úročení	71
3.10 Nominální a reálná úroková sazba	75
3.11 Hrubý a čistý výnos	77
4. Spoření	82
4.1 Spoření krátkodobé	82
4.2 Dlouhodobé spoření	91
4.3 Kombinace krátkodobého a dlouhodobého spoření	98
5. Důchody jako pravidelné platby z investice	118
5.1 Důchod bezprostřední	120
5.2 Důchod odložený	127
5.3 Důchod věčný	131
6. Splácení úvěru	138
6.1 Splácení úvěru stejnými splátkami (konstantní annuita)	140
6.2 Určení počtu předem daných konstantních annuit a poslední splátky úvěru	146
6.3 Úmor úvěru nestejnými splátkami	151
7. Směnky a směnečné obchody	164
7.1 Diskont a eskontní úvěr	165
7.2 Eskont směnky na základě střední doby splatnosti	169
7.3 Depozitní směnky	171

8. Skonto	174
8.1 Srovnání absolutní výše skonta a úroku	175
8.2 Srovnání relativní výše skonta a úroku	176
9. Běžné účty	178
9.1 Metody výpočtu úroků na běžných účtech	178
9.2 Zůstatkový způsob	178
9.3 Postupný způsob	180
9.4 Zpětný způsob	180
10. Hypoteční úvěry	182
10.1 Stanovení výše hypotečního úvěru	183
10.2 Splácení hypotečních úvěrů	185
10.3 Státní finanční podpora hypotečního úvěrování	187
11. Spotřebitelské úvěry	193
11.1 Úročení spotřebitelských úvěrů	194
12. Forfaiting, faktoring a leasing	198
12.1 Forfaiting	198
12.2 Faktoring	205
12.3 Leasing	209
13. Dluhopisy	214
13.1 Cena dluhopisu	217
13.2 Výnos z dluhopisů a jeho měření	223
13.3 Výnosové křivky	229
14. Durace, konvexita, imunizace	238
14.1 Durace pevně úročeného dluhopisu	238
14.2 Další typy durace	241
14.3 Konvexita	245
14.4 Imunizace	248
15. Měření výkonnosti portfolia	256
15.1 Časově vážené metody (TWR)	256
15.2 Peněžně vážené metody (MWR)	258
16. Akcie	262
16.1 Cena akcie	262
16.2 Předkupní právo	268
16.3 Výnos z akcií a jeho měření	274
17. Měnový kurz a devizové obchody	280
17.1 Způsob kotace měnových kurzů	280
17.2 Křížové kurzy	282
18. Finanční termínové obchody	286
18.1 Termínová úroková sazba	287
18.2 Termínová cena cenného papíru	290
18.3 Termínový měnový kurz	291
18.4 Termínové obchody v praxi	298
Literatura	300
Rejstřík	302

Předmluva

I osmé, rozšířené vydání *Finanční matematiky pro každého* se drží osvědčených principů, na kterých byla založena vydání předchozí. To znamená, že srozumitelným způsobem vysvětluje základní matematické postupy využívané v bankovní a finanční praxi širokému okruhu čtenářů.

Knížka se snaží důsledně naplnit to, že by měla být určena skutečně *pro každého*, kdo se z jakéhokoliv důvodu zajímá o finanční matematiku. Nabízí proto jak spolehlivého průvodce při prvních krocích do tajů finančních výpočtů, aniž musí čtenář mít rozsáhlé matematické či ekonomické znalosti, tak může být i cenným rádčem profesionálovi při objasnění matematického zákulisí finančních produktů a investování.

Je koncipována jako učebnice a vychází ze zkušeností autorů při výuce na Vysoké škole ekonomické v Praze. Je proto vhodná pro studenty vysokých, vyšších odborných či středních škol s ekonomickým zaměřením. Snadno se v ní však budou orientovat i ti, kteří si budou chtít doplnit v dnešní době nezbytné znalosti samostudiem.

Obsah knížky je možné rozdělit do dvou celků. První, kapitoly 1 až 6, vysvětluje matematické metody a postupy, které jsou využívány v oblasti financí. Druhý celek, kapitoly 7 až 18, je potom zaměřen na konkrétní aplikace těchto postupů u všech důležitých bankovních a finančních produktů.

Výklad v jednotlivých kapitolách je nejdříve veden v obecné rovině, následně je demonstrován na praktickém příkladě, který je doprovázen i vzorovým řešením.

Pro rychlou orientaci a snadné hledání odpovědi na určitou otázku obsahuje knížka podrobný věcný rejstřík.

Věříme, že Finanční matematika pro každého poskytne každému, kdo ji otevře, zajímavé informace, které využije při finančním rozhodování v podnikání či správě svých soukromých financí.

1. Základní pojmy

Finanční matematika není nic jiného než využití matematiky ve finanční oblasti. V textu se proto budeme setkávat s některými matematickými pojmy a postupy. Pro ty, kteří potřebují zopakovat základy matematiky, potřebné ve finanční matematice, je určena úvodní kapitola.

1.1 Procentový počet

Slovo **procento** je latinského původu a znamená setinu celku nebo základu.

Základem procentového počtu je skutečnost, že velikost dané veličiny neuvádíme absolutně v daných jednotkách, ale relativně (poměrně). To znamená, že uvedeme její poměr k velikosti odpovídající veličiny (vyjádřené ve stejných jednotkách), kterou jsme zvolili za základ.

Pro jedno procento potom platí:

$$1\% = \frac{1}{100},$$

tzn. jedno procento je jedna setina ze základu = 0,01 základu; potom:

100 % = 1 celek = celý základ.

V jednoduchých úlohách s procenty se objevují tři základní veličiny:

- základ (budeme označovat z);
- počet procent (budeme označovat p);
- procentová část, která je vyjádřením části, odpovídající počtu procent v absolutních jednotkách (budeme označovat x).

Při výpočtu známe dva údaje a třetí údaj počítáme. Podle toho rozlišujeme tři základní typy úloh:

1. výpočet procentové části x ;
2. výpočet základu z ;
3. výpočet počtu procent p .

Výpočet neznámé v jednotlivých typech úloh provádíme podle následujících vzorců:

$$x = z \cdot \frac{p}{100}, \quad (1-1)$$

$$z = \frac{x \cdot 100}{p}, \quad (1-2)$$

$$p = \frac{x \cdot 100}{z}, \quad (1-3)$$

kde x je procentová část;
 z je základ;
 p je počet procent.

Jednou z možností výpočtu neznámého údaje v úlohách s procenty je i použití úměry neboli trojčlenky.

Příklad 1-1 Výpočet procentové části

Kolik činí sjednaný podíl na zisku ve výši 15 % z prodejní ceny, má-li výrobní cena výši 2 000 Kč a prodejní cena činí 115 % výrobní ceny?

Řešení

Nejprve vypočítáme, jak vysoká byla prodejní cena. To je problém výpočtu procentové části podle vztahu (1-1). Dosadíme $z = 2\,000$, $p = 115\%$. Potom:

$$x = z \cdot \frac{p}{100} = 2\,000 \cdot \frac{115}{100} = 2\,300.$$

Prodejní cena činila 2 300 Kč.

Nyní potřebujeme zjistit, kolik činí podíl na zisku ve výši 15 % z prodejní ceny. Opět počítáme procentovou část. Nyní dosadíme $p = 15\%$, $z = 2\,300$:

$$x = z \cdot \frac{p}{100} = 2\,300 \cdot \frac{15}{100} = 345.$$

Zisk činí 345 Kč.

Příklad 1-2 Výpočet základu v procentovém počtu

Daň z příjmu činila při sazbě daně 27,5 % částku 1 170 Kč. Jak vysoký byl příjem (od odpočitatelných položek abstrahujeme)?

Řešení

Kromě výše uvedených vzorců je možno použít trojčlenku:

27,5 % odpovídá 1 170 Kč;

100 % odpovídá z Kč.

Sestavíme rovnost:

$$\frac{z}{1\,170} = \frac{100}{27,5};$$

$$z = \frac{100}{27,5} \cdot 1\,170 = 4\,254,54.$$

Hrubý příjem činil 4 255 Kč.

1.2 Funkce

Dříve, než budeme zjednodušeně definovat pojem funkce, seznámíme se s pojmem **proměnná**. Jestliže říkáme, že celková cena zboží závisí na jeho množství, pak proměnné jsou množství a celková cena, konstanta (konstantní veličina) je cena za jednotkové množství. Označíme-li celkovou cenu y , množství zboží x a cenu za jednotkové množství c , pak x , y jsou v tomto případě proměnné a c je konstanta.

Funkcí budeme rozumět předpis, kterým jednoznačně přiřadíme určité hodnotě proměnné x určitou hodnotu proměnné y . Píšeme potom:

$$y = f(x).$$

Proměnnou x nazýváme **nezávisle proměnná** a proměnnou y nazýváme **závisle proměnná**. Hodnota proměnné y závisí na hodnotě proměnné x .

Máme-li např. cenu za 1 kg banánů 28 Kč, pak celková cena nakoupeného množství banánů bude záviset právě na hmotnosti banánů, které nakoupíme.

Podle výše uvedeného příkladu bude tedy hmotnost zboží x nezávisle proměnná a celková cena y závisle proměnná.

Funkce bude mít v tomto jednoduchém případě tvar:

$$y = 28 \cdot x.$$

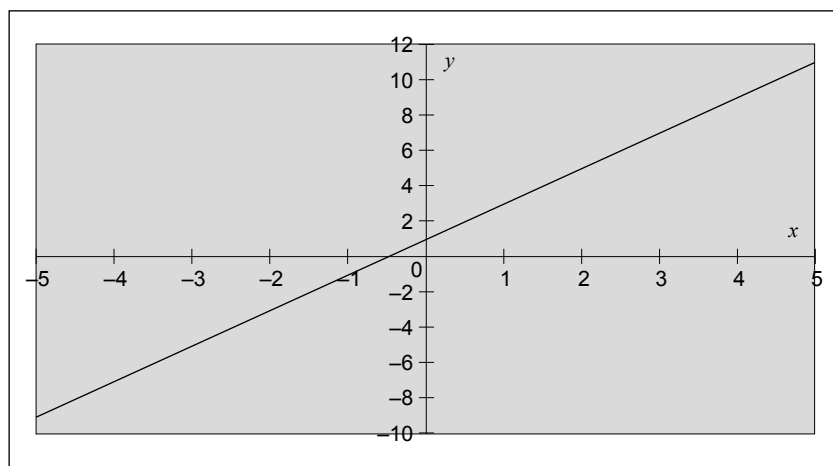
V našem textu se setkáme s několika funkcemi, které si nyní dále popíšeme, neboť nám budou později užitečné.

1.2.1 Lineární funkce

Funkční předpis pro lineární funkci bude mít tvar:

$$y = k \cdot x + q, \quad (1-4)$$

kde k, q jsou konstanty;
 x je nezávisle proměnná;
 y je závisle proměnná.



Obrázek 1.1 Graf lineární funkce $y = 2 \cdot x + 1$

Graficky je možno tuto funkci znázornit přímkou. Konstanta k určuje směr přímky a konstanta q určuje průsečík s osou y .

Lineární funkci můžeme ukázat třeba na příkladu poplatků za telefon. Paušální platba, nezávislá na počtu uskutečněných hovorů, je konstanta q , konstanta k je cenou za jeden impuls a nezávisle proměnnou x je počet uskutečněných impulsů. Závisle proměnná y je potom výše celkového poplatku za telefon.

V ekonomických úvahách se často užívá závislosti zvané **přímá úměrnost**, která je znázorněna právě lineární funkcí.

Říkáme, že dvě veličiny jsou přímo úměrné, jestliže podíl každých dvou odpovídajících si hodnot y_i/x_i je roven konstantě. Tedy:

$$\frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1}{x_1} = k.$$

Funkční předpis je tedy dán vzorcem:

$$y = k \cdot x. \quad (1-5)$$

Grafem je přímka, procházející počátkem (průsečíkem os x a y). Známe-li konstantu k , můžeme ke kterékoli hodnotě x_i vypočítat hodnotu y_i .

Předchozí příklad by byl přímou úměrností, jestliže by telefonní poplatky neobsahovaly paušální platbu.

1.2.2 Rovnoosá hyperbola

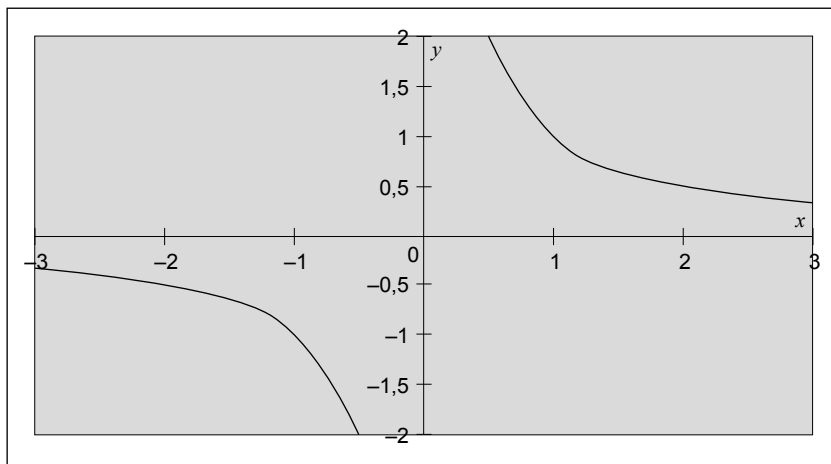
Dále se v ekonomických úvahách setkáváme se závislostí zvanou **nepřímá úměrnost**. Říkáme, že dvě veličiny jsou nepřímo úměrné, jestliže součin každých dvou odpovídajících si hodnot $x_i \cdot y_i$ je roven konstantě. Tedy:

$$x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = k.$$

Funkční předpis je v tomto případě dán vzorcem:

$$y = \frac{k}{x}. \quad (1-6)$$

Grafem nepřímé úměrnosti je hyperbola. V případě, že $k = 1$, se nazývá rovnoosá.



Obrázek 1.2 Graf rovnoosé hyperboly

V našem příkladu s telefony (bez paušální platby, tj. $q = 0$) jsme řekli, že celkový poplatek za telefon (y) je dán součinem ceny za jeden impuls (k) a počtu uskutečněných impulsů (x), to je:

celkový poplatek $y = \text{cena impulsu } k \cdot \text{počet impulsů } x$.

Celkový poplatek y je přímo úměrný ceně za jeden impuls k .

Pokud budeme však naopak znát celkový poplatek a cenu jednoho impulsu a budeme chtít zjistit počet uskutečněných impulsů, můžeme tak učinit dosazením do vzorce:

$$\text{počet impulsů} = \frac{\text{celkový poplatek}}{\text{cena za jeden impuls}}.$$

Vidíme, že počet impulsů je (při daném celkovém poplatku) nepřímo úměrný ceně za jeden impuls.

1.2.3 Exponenciální funkce

Exponenciální funkcí budeme rozumět funkci, kde nezávisle proměnná se vyskytuje jako exponent. To znamená, že ji můžeme psát ve tvaru:

$$y = a^x, \quad (1-7)$$

kde $a > 0$, x je racionální číslo¹.

Z matematiky víme, že každé reálné číslo² umocněné na nultou se rovná jedné. Z toho můžeme pro exponenciální křivky odvodit zajímavou vlastnost. Pro všechna a platí, že pro $x = 0$ se rovná $a^x = 1$. Z toho vyplývá, že všechny exponenciální křivky procházejí bodem $(0, 1)$, který leží na ose y .

Speciální průběh má exponenciální funkce, je-li a rovno jedné ($a = 1$). Pak pro všechna x platí, že y se rovná také jedné ($y = 1$), neboť číslo jedna umocněné na libovolné číslo je opět číslo jedna. Grafem je v tomto případě přímka rovnoběžná s osou x .

Funkční hodnoty exponenciální funkce y budou pro libovolné hodnoty proměnné x kladné.

Speciálním případem je funkce:

$$y = e^x,$$

kde e představuje tzv. **Eulerovo číslo**, definované pomocí limity³ jako:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad (1-8)$$

což budeme potřebovat v oddílu 3.9 při definici úrokové intenzity.

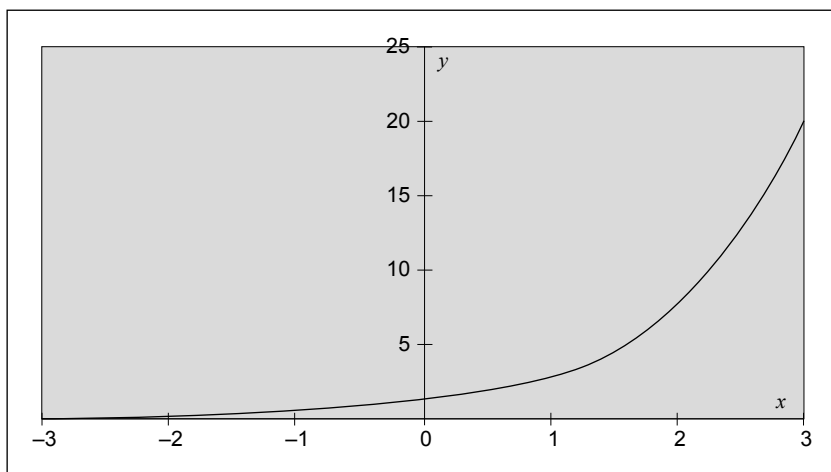
Exponenciální funkci použijeme v oddílu 3.1 při odvozování problematiky složeného úročení.

¹ **Racionální číslo** je číslo, které je možno vyjádřit jako podíl dvou celých čísel. **Celá čísla** jsou čísla: ... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... Celá kladná čísla nazýváme **přirozená čísla**.

² **Reálné číslo** je jak číslo racionální, tak číslo, které není možno napsat ve tvaru podílu dvou celých čísel (**číslo iracionální**), např. $\sqrt{2}$.

³ Zde se jedná o limitu posloupnosti (viz oddíl 1.4).

Příklad exponenciální funkce je znázorněn grafem na obrázku 1.3.



Obrázek 1.3 Graf exponenciální funkce $y = e^x$

1.2.4 Logaritmická funkce

Logaritmická funkce je funkcí inverzní k funkci exponenciální. Inverzní funkcí rozumíme funkci, kde původní závisle proměnná se stala nezávisle proměnnou a naopak. Logaritmickou funkci zapisujeme:

$$y = \log_a x, \quad (1-9)$$

kde nazýváme:

$x \in (0, \infty)$ číslo logaritmované;
 $a \neq 1$ základ logaritmu;
 y logaritmus.

Logaritmus y je číslo, kterým když umocníme základ a , dostaneme logaritmované číslo x . To znamená, že platí:

$$a^y = x.$$

Hodnoty nezávisle proměnné x logaritmické funkce musejí být vždy kladné, neboť odpovídají hodnotám závisle proměnné exponenciální funkce,

kteřá je inverzní funkcí k funkci logaritmické. Jak jsme viděli, byly funkční hodnoty závisle proměnné exponenciální funkce vždy kladné.

Všechny logaritmické křivky analogicky jako křivky exponenciální procházejí pro všechny hodnoty a stejným bodem, který v případě logaritmických křivek leží na ose x , bodem $(1,0)$.

Pro naše účely budeme užívat **přirozený logaritmus**, kde $a = e$ a e je již zmíněné Eulerovo číslo.

Zapisujeme:

$$y = \log_e x = \ln x.$$

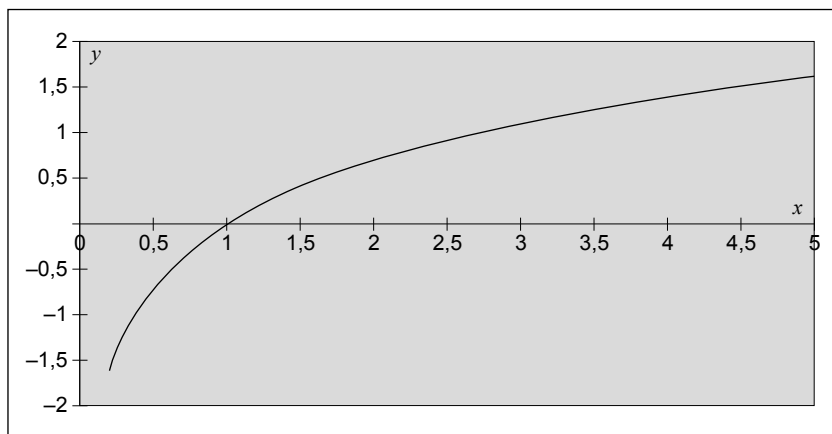
Je-li základ logaritmu a roven deseti ($a = 10$), hovoříme o **dekadickém logaritmu**. Pak píšeme:

$$y = \log_{10} x.$$

Tedy:

$$y = 10^y.$$

Průběh logaritmické funkce pro $a = e$ je znázorněn grafem na obrázku 1.4.



Obrázek 1.4 Graf logaritmické funkce $y = \ln x$

Pro logaritmy platí pro libovolná čísla $u, v \in (0, \infty)$ a reálná čísla w následující základní vztahy:

$$\ln(u \cdot v) = \ln u + \ln v; \quad (1-10)$$

$$\ln \frac{u}{v} = \ln u - \ln v; \quad (1-11)$$

$$\ln u^w = w \cdot \ln u. \quad (1-12)$$

S logaritmickou funkcí se setkáme např. u již zmíněného složeného úročení, kdy známe konečnou (zúročenou) výši kapitálu, jeho výši počáteční a máme určit (při dané úrokové sazbě) dobu uložení.

1.3 Průměry

1.3.1 Aritmetický průměr

Aritmetický průměr m_a je pro n čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$ definován jako:

$$m_a = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}. \quad (1-13)$$

Zjednodušeně řečeno, aritmetický průměr získáme, když součet daných čísel vydělíme jejich počtem.

Jsou-li mezi danými čísly a_i některá čísla stejná, např. mějme:

n_1 čísel a_1 ,

n_2 čísel a_2 ,

:

n_r čísel a_r ,

pak můžeme výpočet zjednodušit a jejich aritmetický průměr bude roven:

$$m_a = \frac{n_1 \cdot a_1 + n_2 \cdot a_2 + \dots + n_r \cdot a_r}{n_1 + n_2 + \dots + n_r}, \quad (1-14)$$