

edice **aliter**



Eli
Maor

**HUDBA
V ČÍSLECH,
ČÍSLA
V HUDBĚ**

Od Pythagora k Schoenbergovi

edice **aliter**

Eli
Maor

**HUDBA
V ČÍSLECH,
ČÍSLA
V HUDBĚ**

**Od Pythagora
k Schoenbergovi**

Argo a Dokořán 2020

Music by the Numbers

Copyright © 2018 by Princeton University Press

Translation © Vít Penkala, 2020

ISBN 978-80-257-2982-3 (váz.)

ISBN 978-80-257-3153-6 (e-kniha)

Památce mého dědečka Karla Stiefela (1881–1947),
který mi vštípil zájem o vědu a lásku k hudbě



OBSAH

PŘEDMLUVA	9
1 Prolog: Svět v krizi	19
2 Teorie strun, 500 př. n. l.	31
ODBOČKA A Jde hlavně o názvosloví	41
3 Osvícenství	43
4 Velká debata o strunách, 1730–1780	57
ODBOČKA B Slinky	71
5 Nejvýznamnější dar	75
6 Ladné ladění	91
ODBOČKA C Hudba pro knihy rekordů.	
Nejhlubší, nejdelší, nejstarší a nejdivnější	99
7 Hudební pomůcky. Vidlicová ladička a metronom	103
8 Rytmus, metrum a metrika	113
9 Vztažné soustavy: Kde to jsem?	121
ODBOČKA D Hudební hierarchie	137
10 Relativistická hudba	141
11 Dozvuky	151
ODBOČKA E <i>Bernoulli</i>	160
12 Poslední pythagorejci	165
BIBLIOGRAFIE	169
PRAMENY ILUSTRACÍ	171
REJSTŘÍK	173

Slavný skladatel Igor Stravinskij jednou řekl: „Hudební forma má blízko k matematice – ne snad k matematice samotné, ale rozhodně k jakémusi matematickému myšlení a vztahům.“ A mnozí spisovatelé psali o údajné blízkosti matematiky a hudby, a dokládali to skutečností, že mnozí vědci měli rádi hudbu nebo ji dokonce sami provozovali; člověka hned napadne Albert Einstein a jeho housle, ale našlo by se mnoho dalších příkladů.

Nejspíš na tom něco je, ale vztahy mezi těmito obory nebyly nikdy symetrické. Mají mnoho společných rysů, to ano. Matematika i hudba například stojí na efektivním systému notace – souboru symbolů, ze kterých vědec či hudebník vyčte přesný, jednoznačný význam (byť v hudbě tyto symboly doplňuje množství verbálních výrazů popisujících citovou složku interpretace). Je také zajímavé, že oba tyto systémy se začaly vyvíjet ve stejné době, počínaje zhruba rokem 1000 př. n. l., i když v matematice se notace nadále vyvíjí s tím, jak vznikají nová odvětví tohoto oboru.

Matematika a hudba mají také řadu společných termínů. Vezměte si například výraz *harmonický*. Toto adjektivum znamená „příjemný na poslech“; vztahuje se také k řadě vyšších harmonických tónů, které spoluutvářejí zvuk všech hudebních nástrojů. V matematice je dnes tento výraz skoro stejně častý jako v hudbě; dvousvazkový *Encyklopedický*

slovník matematiky uvádí na dvacet užití tohoto slova, mimo jiné *harmonický poměr*, *harmonická řada*, *harmonická analýza* či *harmonická funkce*. Jiným příkladem společné terminologie je například *inverze* [*inversion*] (hudebního intervalu – v české terminologii *obrat*; inverze bodu vzhledem ke kružnici), *kořen* [*root*] (akordu – v češtině ovšem základní tón; kořen rovnice), *posloupnost* (tónů; čísel) a *řada* (v hudbě se týká dvanáctitónové kompoziční techniky Arnolda Schoenberga; v matematice jde o součet nekonečného sledu členů).

Během posledních pětadvaceti století byla hudba pramenem inspirace pro matematiky, kteří v ní nacházeli věčný zdroj pozoruhodných problémů, které jim nedaly spát. Nejslavnějším z nich je pravděpodobně problém vibrující struny, téma, o kterém se dohadovala řada velkých matematiků 18. století po více než padesát let a jež nakonec vedlo k vytvoření matematiky překonávající diferenciální a integrální počet. Aritmetický, geometrický a harmonický průměr dvou kladných čísel a , b : $A = \frac{a+b}{2}$; $G = \sqrt{ab}$; $H = \frac{2ab}{a+b}$ se vši pravděpodobností vycházejí z poměrů 2:1, 3:2 a 4:3 charakterizujících oktávu, kvintu a kvartu – pythagorejské dokonalé souzvuky – jak ostatně naznačuje výraz „harmonický“. A odvětví teorie čísel, které se zabývá řetězovými zlomky, se možná zrodilo ze snahy nalézt co nejpresnější číselné poměry pro různé intervaly v hudební stupnici.

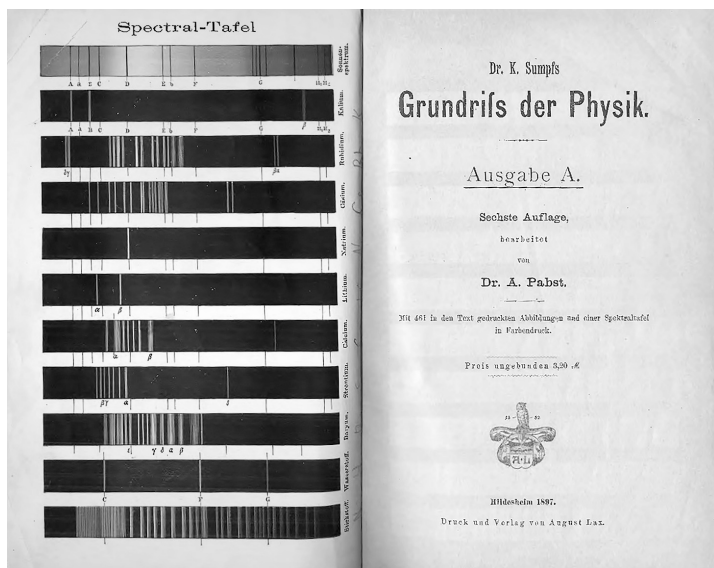
Má ale matematika podobný vliv na hudbu? Matematika pochopitelně dokáže dobře osvětlit techničtější aspekty hudby, jako je ladění nástrojů či navrhování koncertních síní s dobrou akustikou. Ale její vliv na hudbu jakožto umění byl, až na pár pozoruhodných výjimek, jen omezený; obě tyto disciplíny prostě sledují každá svou cestu. Pro tento odstup je typické obsáhlé pojednání Leonharda Eulera o hudbě

(viz kapitolu 4), o kterém se říkalo, že „pro muzikanty je tam moc geometrie, a pro geometry moc hudby“.

Vyrostl jsem v rodině, která milovala evropskou kulturu – literaturu, výtvarné umění a hudbu. Ani jeden z mých rodičů neměl žádné hudební vzdělání, ale moje matka, malířka, zbožňovala Mozarta. Sedávala u svého stolu a malovala nádherné květiny a přitom měla vždy puštěné rádio, naladěné na stanici s klasickou hudbou. Mozart se tak stal součástí mého dětství, jak jeho hudba, tak příběhy, které mi o něm maminka vyprávěla. Jednou mě vzala do kina na film o Mozartově životě. Shafferův divadelní *Amadeus* se proslavil až o desetiletí později. Pamatuji si, že jsem plakal při scéně líčící Mozartovy poslední hodiny, kdy ležel na smrtelném loži a diktoval noty svého nedokončeného *Requiem* studentu Süßmayrovi.

Ale celoživotní lásku k hudbě i vědě mi vštípil dědeček, matčin otec. V roce 1938 uprchl s babičkou z Německa do Izraele (tehdejší Palestiny), když se život pro Židy stal za nacistického režimu nesnesitelným. Mám jeho fotografii, na které mi hraje na housle; bylo mi tehdy pět let (je otištěna na začátku této knihy).¹ Na její zadní stranu napsala maminka (která snímek pořídila) jméno písně, kterou mi tehdy hrál: *Guter Mond, du gehst so stille* (Jak tiše pluješ, milý měsíci), tradiční německou ukolébavku.² Bylo to první hudební vystoupení, které jsem zažil, a dodnes si ho docela jasně pamatuji. Pak mi jednoho dne dědeček oznámil, že se s houslemi musí rozloučit – zoufale potřeboval peníze. Rozplakalo mě to.³

A krom toho si vzpomínám na učebnici fyziky, kterou používal, když chodil na gymnázium. Vyšla v roce 1897 a ilustrovaly ji stovky nádherných rytin; a co bylo důležitější, kniha pojednávala o nejnovějším vývoji ve fyzice, mimo jiné



OBR. P.1: Titulní strana a frontispis knihy *Grundrifs der Physik* (Základy fyziky) od D. K. Supfse (Hildesheim 1897).

o objevu rentgenového záření a jeho možném využití v lékařství. Dědeček nejspíš knihu studoval opravdu důkladně, skoro na každé stránce byly poznámky psané jeho rukou. Celé hodiny jsme spolu sedávali, probírali jsme různá témata a on mi je vysvětloval. Bylo to mé první vědecké zasnění. Mám tu knihu dodnes a nesmírně si jí cením (viz obrázek P.1).

Ve čtyřicátých letech, když nad světem visela temná válečná mračna, moji rodiče doma v Tel Avivu občas pořádali večery klasické hudby – pouštěli šelakové gramofonové desky na gramofonu na 78 otáček. Ty večery pro mě tolik znamenaly! Gramofon se musel nejprve natáhnout velkou klikou – říkalo se jí *manuela* –, a díky tomu mohl přístroj běžet asi deset minut – dost na to, aby se přehrály obě strany

desky. Pokud jste ho včas zase nenatáhli, gramofon začal zpomalovat, a tím se zpomaloval i rytmus skladby a snižovala se výška tónů. Na čtyřicetiminutovou Beethovenovu symfonii bylo třeba pěti či šesti takových desek, které se ukládaly do obalů ve velké zdobené knize, jež vypadala jako nějaké starodávné fotoalbum (moderní výraz „album“ pro hudební nahrávku dost možná vychází z těchto fyzicky existujících alb). Každý z těchto špalků vážil tolik jako tisícistránková učebnice diferenciálního počtu! Nedej bůh, aby deska vypadla z obalu na podlahu a rozbila se. Ovšem největší starostí při přehrávání těchto desek byly jehly. Musely se vyměňovat vždy po nějakých deseti hodinách hraní, jinak se ztupily a poškozovaly drážky v deskách. Jehly se vyráběly z chromu, a během války se jejich zásoby velmi ztenčily. Brzy však byla k mání náhrada – dřevěné jehly! Není třeba říkat, že zvuk těchto nahrávek byl dosti drsný a skřípavý, ale právě tyhle desky mě uvedly do světa klasické hudby.

„Každý inteligentní hudebník by měl být obeznámen s fyzikálními zákony, které tvoří základ jeho umění,“ říká Clarence G. Hamilton v půvabné knížce *Sound and Its Relation to Music* (Zvuk a jeho vztah k hudbě), vydané v roce 1912. Když pro tuto chvíli necháme stranou lehce prezíravý tón jeho prohlášení (a že se obracel pouze k mužům, což bylo samozřejmě v souladu se společenskými normami té doby), je třeba připustit, že jen velmi málo skladatelů klasické hudby se ve své profesi přímo zabývalo matematikou či fyzikou. Z toho mála vynikají dvě osobnosti: Jean-Philippe Rameau (1683–1764), jenž napsal rozsáhlé pojednání o akustice, a Giuseppe Tartini (1692–1770), který objevil takzvané kombinační tóny, jak jim říkáme dnes (viz kapitolu 5). V naší době se poměry poněkud změnily a někteří skladatelé se s různými úspěchy

pokoušeli založit hudbu na matematických principech. Nejvýznačnější z nich byl Schoenberg (1874–1951), jehož seriální hudbou se budeme zabývat v kapitolách 9 a 10. Měl bych také zmínit Iannise Xenakise (1922–2001) a Karlheinz Stockhausena (1928–2007). První z nich vystudoval stavitelství a architekturu a teprve potom se začal věnovat hudbě; ve své tvorbě využíval stochastických principů; jeho partitury často vypadají spíše jako soubor grafů a linií než jako tradiční notový záznam. Avantgardní obecnstvo jejich kompozice přivítalo s velkým nadšením, ale jestli se stanou součástí mainstreamového repertoáru klasické hudby, se teprve ukáže.

Tato kniha je tedy příběhem vztahu mezi dvěma úžasnými disciplínami, které toho mají tolik společného, ale pořád mezi nimi zůstává uctivý odstup. V žádném případě nejde o úplnou historii tohoto tématu, nejde ani o učebnici matematiky a fyziky z hlediska jejich propojení s hudbou; o tom se můžeme dočíst v řadě jiných vynikajících knih. Já se spíše pokouším nahlédnout spřízněnost matematiky a hudby z historického hlediska, a zaměřit se nejen na fakta, ale i na lidi, kteří za nimi stojí – na vědce, vynálezce, skladatele i leccjaké výstředníky. Nevyhýbal jsem se ani tomu, abych vyslovil své vlastní názory na některá témata, se kterými někteří čtenáři třeba nebudou souhlasit – například na emociální atributy (podle mě značně zveličené), které se často přisuzují jednotlivým tóninám. Kniha je určena každému čtenáři, který se zajímá o matematiku, hudbu a vědu obecně; nepředpokládá žádnou hlubší znalost matematiky, jež by přesahovala školskou algebru a geometrii, ale základní orientace v hudební notaci bude výhodou.

Pokusy propojit matematiku a hudbu jsou však nevyhnutelně omezeny odlišnými cíli těchto dvou disciplín: matematika – a věda obecně – cílí na náš intelekt, naši schopnost

analyzovat abstraktní schémata a vztahy, a to objektivně a logicky, zatímco hudba se snaží dotknout našich srdcí, probudit naše emoce svým zvukem, rytmem, časovými a sluchovými strukturami. Jak říká nápis vítající návštěvníky Muzea hudebních nástrojů v arizonském Phoenixu: *Hudba je jazyk duše*.

Každý rozbor interdisciplinárního tématu, jako je tento, se nevyhnutelně dotkne řady souvisejících oborů. Netřeba zdůrazňovat, že v hudbě hrají svou roli fyzikální zákony, ale vedle nich také astronomie – počínaje Pythagorovým přesvědčením, že oběžným drahám planet vládou zákony hudební harmonie, a konče objevem rezonancí mezi oběžnými drahami planet a jejich satelitů, ke kterému došlo v 19. století – tyto rezonance často odpovídají poměrům obvyklých hudebních intervalů (viz kapitolu 12). Můžeme také zmínit nedávný objev zvukových vln v rozlehlých prostorech mezi galaxiemi – vln s konkrétní vlnovou délkou a výškou (viz Odbočku C) – možná jde o vrcholné vtělení starobylé alegorické hudby sfér.

V každém případě platí, že v minulých dobách nebylo na rozdíl od současnosti obvyklé tak ostře oddělovat matematiku a přírodní vědy – a obecněji i vědy humanitní. Až do počátku 19. století se většina velkých postav klasické vědy považovala stejně tak za matematiky jako za filozofy, fyziky a přírodovědce. Vyznali se v širokém spektru oborů, které považovali za různé cesty, jak pochopit fungování přírody. A k těmto oborům patřila i hudba.

Poznámka k citování literatury: abych se vyhnul opakování, cituji knihy, ke kterým odkazuji v textu a které jsou zahrnuty i v bibliografii, jen jménem autora a názvem. Snad ani

není třeba zmiňovat, že všechny hudební termíny a také životopisy mnoha skladatelů jsou podrobně pojednány ve 29 svazcích nejobsáhlejší hudební encyklopedie *The New Grove Dictionary of Music and Musicians* (Macmillan, 2001, dostupné také na internetu na www.oxfordmusiconline.com). Skvělé biografie mnoha matematiků lze nalézt na webové stránce School of Mathematics and Statistics of the University of St. Andrews ve Skotsku (www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Indexes/HistoryTopics.html).

Jsem hluboce zavázán svým přátelům a kolegům za mnoho rozprav, které jsme vedli o problémech týkajících se matematiky a hudby. Jsou to David Andrea Anati, Wilbur Hoppe, Robert Langer a Michael Sterling. Také bych rád poděkoval anonymním posuzovatelům, kteří četli rukopis a poskytli mi užitečné komentáře a návrhy. Velké objetí patří Vickie Kernové, redaktorce z Princeton University Press, které se s důvěrou svěruji už skoro dvacet let, za její neocenitelné rady a vedení ve všech fázích psaní téhle knihy. Jsem také hluboce zavázán zaměstnancům Princeton University Press za jejich neúnavnou péči, s jakou se věnovali rozličným fázím výroby mé knihy. Zejména bych chtěl poděkovat Debbie Tegardenové, která na celý proces dohlížela a nesmírně mi pomohla při výběru mnoha ilustrací, dále Lauren Buccaové, která se ujala získávání potřebných svolení, aby ilustrace mohly být otištěny; Chrisi Ferrantemu za typografickou úpravu a návrh obálky; Dmitri Karetnikovi, Meghan Kana-bayové, Elizabeth Blazejewski a Jacquie Poirierové za jejich společnou práci na grafice, digitálních souborech a sazbě; Carole Schwagerové za korekturu rukopisu a Jodi Bederové za transkripci Schoenbergovy tónové řady v kapitole 10. Mnohé díky dlužím svému vnukovi Richardu Maorovi za to, že mi pomohl získat kvalitní podklady k některým ilustracím.

A v neposlední řadě patří můj největší dík mé drahé ženě Dalii, která mě povzbuzovala, dokud jsem tuto knihu nedokončil, a pečlivě pročetla obtahy, než šly do tiskárny. Bez ní by tato knížka nespatriilo světla světa. Díky vám všem!

POZNÁMKY

1. Jsem vděčný své sestře Shulamit Nathansonové, že tuhle fotku objevila mezi těmi stovkami obrázků po rodičích.
2. Díky internetu se mi tu píseň podařilo vypátrat, dobrých pětasedmadesát let poté, co mi ji dědeček hrával. Můžete si ji poslechnout v podání Juliana Neela na www.youtube.com/watch?v=7C_yFytWKIU anebo si projít notový záznam a text na www.labbe.de/liederbaum/index.asp?themaId=25&titelId=438.
3. Dodnes mám ladičku, podle které si housle ladil. Na rukojeti má vyraženo A; a i když je zrezivělá, dodnes vydává tón A se správnou frekvencí 440 Hz.