

PETR KŮRKA
BEDŘICH VELICKÝ

HERMENEUTIKA A METAFORIKA ČÍSEL

OD POČTŮ KE KVANTOVÉ
MECHANICE

KAROLINUM

Hermeneutika a metaforika čísel

Od počtů ke kvantové mechanice

Petr Kůrka

Bedřich Velický

Recenzovali:

prof. RNDr. Michal Křížek, DrSc.

prof. Ing. Edita Pelantová, Csc.

Vydala Univerzita Karlova

Nakladatelství Karolinum

Ovocný trh 560/5, 116 36 Praha 1

www.karolinum.cz

Praha 2021

Jazyková korektura Jitka Hořejšová

Sazba Petr Kůrka

První vydání

Na obálce: Znázornění komplexní funkce sinus
v komplexní rovině

Ivanu M. Havlovi, který stvořil Centrum pro teoretická studia,
jedinečné místo, kde jsme se mohli setkat k plodné nadoborové
spolupráci.

© Univerzita Karlova, 2021

© Petr Kůrka – Bedřich Velický, 2021

ISBN 978-80-246-4819-4

ISBN 978-80-246-4833-0 (online : pdf)



Univerzita Karlova
Nakladatelství Karolinum

www.karolinum.cz
ebooks@karolinum.cz

Obsah

Předmluva	9
1 Přirozená čísla	15
1.1 Základní čísla	15
1.2 Řadová čísla	19
1.3 Stejněpočetnost	20
1.4 Jména čísel	21
1.5 Algebraická symbolika	24
1.6 Přirozená čísla	28
1.7 Princip úplné indukce	30
1.8 Naivní teorie čísel	33
2 Racionální čísla	39
2.1 Délka a vzdálenost	40
2.2 Zlomky	40
2.3 Plocha	43
2.4 Objem	45
2.5 Úhel	46
2.6 Váha	47
2.7 Čas	47
2.8 Teplota	49
2.9 Odvozené veličiny	49
2.10 Teorie poměrů	50
2.11 Kvadratické rovnice	54
3 Reálná čísla	59
3.1 Iracionální čísla	60

3.2	Řezy	62
3.3	Úplnost	65
3.4	Nekonečno	67
3.5	Reálná poloosa	68
3.6	Poziční číselné soustavy	70
3.7	Geometrie číselných soustav	73
3.8	Kontinuum a diskontinuum	76
4	Záporná čísla	81
4.1	Tělesa	82
4.2	Celá čísla	87
4.3	Kvadratické rovnice	89
4.4	Reálné funkce	92
4.5	Diferenciální počet	96
4.6	Integrální počet	99
4.7	Analytické funkce	102
5	Diferenciální rovnice	105
5.1	Exponenciála	106
5.2	Goniometrické funkce	108
5.3	Hyperbolické funkce	113
5.4	Harmonický oscilátor	115
5.5	Vlnová rovnice	118
5.6	Fourierovy řady	121
5.7	Difuzní rovnice	128
6	Komplexní čísla	131
6.1	Kubické rovnice	131
6.2	Komplexní rovina	136
6.3	Komplexní funkce	139
6.4	Kubické rovnice v komplexní rovině	141
6.5	Základní věta algebry	145
6.6	Komplexní sféra	148
6.7	Holomorfní funkce	150
6.8	Křivkový integrál	155
6.9	Analytické pokračování	159
6.10	Diferenciální rovnice	160

6.11	Fourierovy řady	162
6.12	Střídavý proud a napětí	163
6.13	Kvaterniony a oktoniony	170
7	Kvantová mechanika	173
7.1	Komplexní čísla ve fyzice	173
7.2	Zvukové vlny	175
7.3	Elektromagnetické vlny	178
7.4	De Broglieovy hmotné vlny	183
7.5	Schrödingerova rovnice	187
7.6	Stacionární Schrödingerova rovnice	192
7.7	Volná částice	194
7.8	Částice v krabici	198
7.9	Harmonický oscilátor	201
8	Algoritmická čísla	209
8.1	Turingův automat	209
8.2	Univerzální Turingův automat	211
8.3	Rekurzivní množiny	213
8.4	Nekonečná algoritmická slova	215
8.5	Algoritmická zobrazení	216
8.6	Nekonečné rozvoje	218
8.7	Aritmetické operace	220
8.8	Algoritmické funkce	221
8.9	Konstruktivní analýza	223
9	Logika přirozených čísel	225
9.1	Predikátový počet prvního řádu	226
9.2	Pravdivost aritmetických formulí	230
9.3	Sémantika predikátového počtu	231
9.4	Formální důkazy	234
9.5	Axiomatika přirozených čísel	236
9.6	Peanova a Robinsonova aritmetika	238
9.7	Ultraprodukt	241
9.8	Aritmetizace logiky	243
9.9	Nedefinovatelnost pravdivosti	245
9.10	Neúplnost aritmetických teorií	247

9.11 Velká čísla	250
10 Infinitesimální čísla	255
10.1 Nestandardní čísla	255
10.2 Nestandardní množiny a funkce	257
10.3 Topologické pojmy	260
11 Transfinitní čísla	263
11.1 Univerzum množin	263
11.2 Axiomatika teorie množin	266
11.3 Relace a funkce	271
11.4 Třídy	273
11.5 Ordinální čísla	275
11.6 Pravdivost aritmetických sentencí	279
11.7 Kardinální čísla	281
11.8 Kumulativní hierarchie	285
12 Povaha čísel	289
Literatura	299
Jmenný rejstřík	309
Věcný rejstřík	311

Předmluva

V matematice devatenáctého století probíhal proces aritmetizace analýzy, ve kterém se geometrické náhledy diferenciálního a integrálního počtu začaly zakládat analyticky na aritmetice reálných a komplexních čísel. Dedekindova¹ teorie řezů odvodila aritmetiku reálných čísel z aritmetiky přirozených a racionálních čísel a tím vyvstala otázka po založení čísel přirozených. Koncem devatenáctého století se jí zabývá Gottlob Frege (1848–1925) v *Základech aritmetiky* [33] a Edmund Husserl (1859–1938) ve *Filosofii aritmetiky* [45]. Ale tyto pokusy o založení aritmetiky nejsou úplně přesvědčivé. Frege [34] ve své recenzi *Filosofie aritmetiky* vytýká Husserlovi, že zkoumá pojem čísla psychologickým způsobem, ve kterém se smazává rozdíl mezi subjektivním a objektivním. V *Základech aritmetiky* definuje Frege přirozená čísla na základě pojmu stejněpočetnosti. Jak ale upozorňuje Dale Jacqueline v předmluvě k anglickému překladu *Základů aritmetiky* [32], pojem stejněpočetnosti je založen na pojmu vzájemně jednoznačného přiřazení, který již pojem jednotky předpokládá. Ten je ukryt v termínu „jednoznačný“ a stejně tak v německém „beiderseits eindeutigen Zuordnung“ i v anglickém „one-to-one correspondence“. Není tu tedy bludný kruh, kdy to, co se definuje, se už předpokládá? Na problém se založením přirozených čísel poukazuje Michal Ajvaz ve stati *Číslo a jsoucno*:

Pokusy o definici čísla ztroskotávají na tom, že se pokaždé ukáže, že definiens v sobě obsahuje prvky definienda. Je možné říci, co je číslo, a vyhnout se přitom definici v kruhu? Jistě to není možné v rámci matematiky, ale není to zřejmě možné ani prostřednictvím nějakého ústupu do „přiroze-

¹Richard Dedekind (1831–1916)

ného světa“ – i uspořádání přirozeného světa je proniknuto čísly a vztahy (Ajvaz [2, str. 261]).

Vysvětlení kruhem jsou v matematice a v logice považována za nepřipustná. Naproti tomu v humanitních vědách je na nich založena hermeneutická metoda výkladu. V klasické filologii se jedná zejména o výklad textů Písma nebo klasické řecké literatury. Martin Heidegger (1889–1976) hermeneutickou metodu rozšiřuje a zobecňuje na jakýkoliv výklad.

Každý výklad, který má zjednat porozumění, musí již vykládanému rozumět. Tento fakt ani dříve neunikal pozornosti, i když jen v oblasti odvozených způsobů rozumění a výkladu, ve filologické interpretaci. ...

Ale vidět v tomto kruhu něco bludného a ohlížet se po způsobech, jak se mu vyhnout, ba i jen „pocítovat“ jej jako nevyhnutelnou nedokonalost, znamená zásadně rozumění nerozumět (Heidegger [39, str. 180]).

K přirozeným číslům se dostáváme skrze počítání. Počítáme jablka v košíku nebo ovce ve stádě. To předpokládá, že počítané věci považujeme za **nedělitelné rozlišitelné jednotky** stejného druhu. Jejich nedělitelnost může být dána přirozeností jejich vymezení (jablko lze rozdělit, ale potom už to není jablko). Jejich rozlišitelnost může být dána jejich umístěním v prostoru.

Procesu počítání je blízkce příbuzný proces měření – měření vzdálenosti, časového intervalu nebo vážení. Také zde potřebujeme jednotky, ty jsou však **dělitelné** a **arbitrárně stanovitelné**. Měřený údaj vyjadřujeme desetinným nebo racionálním číslem. Přirozená a (kladná) racionální čísla tak mají úzkou vazbu na náš pobyt ve světě.

Jinak je to s čísly zápornými, iracionálními, imaginárními a komplexními. Ta vznikají spíše z vnitřních potřeb matematiky, často proti vůli a odporu samotných matematiků. Již jejich názvy svědčí o výhradách a pochybnostech, které s nimi byly a jsou spojeny. Jejich ontologický status je nejasný, zpochybňuje se samotná jejich existence. Přesto i ona si nacházejí interpretaci a použití, pomáhají nám orientovat se v přirozeném světě a umožňují nám formulovat teorie, kterými si svět

vykládáme. Nejmarkantnější je to u kvantové mechaniky, která s fenomenální přesností postihuje jevy mikrosvěta a která bez komplexních čísel není vůbec myslitelná.

To, že čísla záporná, iracionální a komplexní považujeme za čísla, je metafora. Ona se totiž jako čísla chovají. Můžeme je sčítat, násobit a někdy i umocňovat a srovnávat.

Když vidím ptáka, který chodí jako kachna, plave jako kachna a káčí jako kachna, říkám tomu ptákovi kachna² (James Whitcomb Riley (1849–1916) [75]).

Metaforický přístup k novým skutečnostem a pojmům není nic výjimečného. Metafory prostupují celý náš život, nelze bez nich vůbec mluvit ani jednat. Metaforicky se utvářejí i pojmy, skrze které rozumíme světu. Tento náhled nabízejí Lakoff a Johnson [58], Lakoff a Núñez [59] i Zdeněk Neubauer (1942–2016), když komentuje dílo Paula Ricœura (1913–2005) [74].

Ricœur ukazuje, že nejen básnické obrazy, nýbrž i všechny vědecké modely a teorie, ať se tváří jakkoliv objektivně a definitivně, jsou vlastně *velkými metaforami* – způsoby mluvy pomocí představ a pojmů vzatých z jiné, známé zkušenosti (srv. „planetární model atomu“ či „oblak elektronu“); všimněme si ostatně metaforičnosti i tak odborných termínů jako „hladina cukru v krvi“, „kolísání cen“ atp. To ovšem neznamená, že by tyto vědecké popisy světa nebyly pravdivé, že by to byly „pouhé metafory“: vždyť jde o faktické poznatky par excellence. Jejich metaforická povaha naopak ukazuje, že sama pravda spočívá v metafoře, že *bytí samo je metaforické* (Neubauer [68, str. 158]).

Otázkám založení čísel jsme se věnovali v semináři Fenomenologie matematiky, který probíhal v CTS³ v letech 2017–2019. Zabývali jsme se založením čísel u Fregeho [33] a Husserla [45], zkoumali jsme roli, kterou hrají čísla v moderních fyzikálních teoriích. Jedním z plodů tohoto

²When I see a bird that walks like a duck and swims like a duck and quacks like a duck, I call that bird a duck.

³Centrum pro teoretická studia, společné pracoviště Univerzity Karlovy v Praze a Akademie věd České republiky.

semináře je předkládaná kniha, jejíž témata byla na semináři referována. Děkujeme všem účastníkům semináře, kteří do této diskuze přispěli, případně předběžné verze knihy pročítali a komentovali. Náš dík patří jmenovitě Michalu Ajvazovi, Ivanu M. Havlovi, Štěpánu Holubovi, Ivanu Chvatíkovi, Pavlu Koubovi, Pavlu Krtoušovi, Janu Makovskému, Alexandru Matouškovi a Kateřině Trlifajové.

Moderní pojem čísla je neoddělitelně spojen se vznikem a vývojem formálního matematického jazyka a matematizované fyziky. V předkládané knize tento vývoj sledujeme a vykládáme. Nepředpokládáme žádné speciální matematické znalosti, všechny pojmy motivujeme a vysvětlujeme. Přitom postupně uvádíme a používáme matematický symbolismus – od nejjednodušší algebraické symboliky k poměrně složitému jazyku predikátového počtu. Tomu se dost dobře nelze vyhnout. Jak píše Jacob Klein (1899–1978) ve své pronikavé studii *Řecké matematické myšlení a vznik algebry* [52], matematický formalismus je podstatou moderních fyzikálních teorií.

Vytvoření formálního matematického jazyka mělo rozhodující význam pro konstituci moderní matematické fyziky. Pokud je matematická prezentace považovaná za pouhý nástroj, kterému je dáována přednost, protože náhledy přírodní vědy lze pomocí „symbolů“ vyjádřit nejjednodušším a nejpresnějším způsobem, pak se významu symbolismu nerozumí. Je sice pravda, že v sedmnáctém a osmnáctém století bylo stále ještě možné popsat a sdělit objevy o „přirozených“ vztazích fyzikálních objektů bez matematických termínů. Přesto již tehdy – nebo spíše právě tehdy – to byla matematická forma, *mos geometricus*, na níž se zakládala spolehlivost a věrohodnost tohoto popisu. Po třech stoletích intenzivního vývoje se ale již stalo nemožným obsah matematické fyziky oddělit od její formy. To, že jsou stále v módě elementární prezentace fyzikálních věd, které jsou do jisté míry nematematické, při svém odvozování základních pojmů se zdají být prosté všech předpokladů a spoléhají se spíše na přímou „intuici“, by nás nemělo klamat zastíráním faktu, že je nemožné, a bylo vždy nemožné pochopit význam fyziky bez její matematické formy. Z toho pak pramení nepřekonatelné obtíže, do kterých se zaplétají

diskuze moderních fyzikálních teorií, pokud se fyzikové či nefyzikové pokouší obejít bez matematického aparátu a prezentovat výsledky fyzikálního výzkumu v populární formě (Klein [52, str. 16]).

V tomto duchu jsme se neomezovali na postupné zavádění samotných čísel, ale zároveň jsme poukazovali na alespoň jejich elementární použití jak v matematice, tak i v „reálných“ situacích fyzikálního rázu. Využíváme proto i nezbytných základních prostředků infinitesimálních, které jsou rovněž všechny zavedeny v rámci textu. Ten je tak v principu soběstačný. Je samozřejmé, že předběžná obeznámenost s matematickým formalismem bude nápomocna plynulému sledování textu, není však podmínkou jeho uchopení. Doufáme, že naše pojetí si najde své čtenáře mezi záplavou knih popularizujících matematiku i fyziku bez použití jediného vzorce na jedné straně a literaturou vyhraněně odbornou na straně druhé. Oporou nám byla vzpomínka na mimořádně úspěšné serie knížek *Cesta k vědě*, vydávaných kdysi Jednotou českých matematiků a fysiků a později v trochu jiném formátu nakladatelstvím Academia. Přejeme čtenáři radost při postupném pronikání do celé problematiky pojmu čísla a požitků ze sledování jejího podrobného utváření a jednoduchých, ale poučných aplikací.

Praha, květen 2020

Petr Kůrka
Bedřich Velický

Kapitola 1

Přirozená čísla

Pokusme se o porozumění aritmetice přirozených čísel v hermeneutickém kruhu. Vodítkem nám přitom bude historie čísel pojednaná v knize Georgese Ifraha (1947–2019) *The Universal History of Numbers* [47] a Husserlova fenomenologie.

1.1 Základní čísla

Základní (kardinální) čísla dvě, tři, čtyři atd.¹ vyvstávají jako počty předmětů v přehlednutelných ostře vymezených souborech. Obecný pojem předmětu vypracovává Edmund Husserl [46] v *Idejích k čisté fenomenologii a fenomenologické filosofii*. **Předmět** je jsoucno, věc či objekt, na který může být zaměřena naše pozornost (intence) a který si v čase podržuje svou identitu. Může to být fyzické jsoucno jako určitý strom nebo deštník, ale také určitá věta, určité město, jízdní řád nebo parlament.

Předměty kategorizujeme pomocí různě obecných **pojmu**, které vytvářejí stromovou strukturu. Například náš „Alík“ se zařazuje pod pojmy „pes – šelma – savec – obratlovec“. **Rozsah pojmu** je neostře vymezený soubor, který tvoří všechny předměty, které se pod daný pojem zařazují. Při zařazování předmětů pod pojmy srovnáváme daný předmět s typickými představiteli pojmu. Řídíme se přitom určitými rozlišovacími znaky, i když možná jen nevědomě. Pokud se ale chceme

¹Ke statusu čísla **jedna** viz konec odstavce 1.2.